

# Zwei Ausflüge in die Algorithmik

## 2. Teil: Wahlsysteme

Nadja Betzler und Rolf Niedermeier

Theoretische Informatik I / Komplexitätstheorie  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

## Wahl

**Gegeben:** Wähler und Kandidaten

**Gesucht:** Gewinner

### Beispiele:

„klassische“ Wahlsituationen, z.B.

- politische Wahlen
- Wahl zum Jahrgangssprecher
- Vorstandswahlen im Verein

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

## Wahl

**Gegeben:** Wähler und Kandidaten

**Gesucht:** Gewinner

### Beispiele:

Entscheidungen im Freundeskreis oder in der Freizeit

- Ausgehen: In welche Kneipe/Disko gehen wir?
- Party: Welche Musik sollen wir hören?
- Urlaub: Welches Ziel?

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

## Wahl

**Gegeben:** Wähler und Kandidaten

**Gesucht:** Gewinner

## Beispiele:

Wirtschaft

- Gremium entscheidet welche Projekte gefördert werden
- Personalabteilung wählt aus vielen Bewerbern
- Geschäftsleitung entscheidet über einen neuen Firmenstandort

Wahl zwischen Berlin und Bonn als Hauptstadt:

- Antrag A: Berlin
- Antrag B: Bonn
- Antrag C: Berlin/Bonn
- Antrag D: gegen Doppellösung (“Zur Erhaltung der Funktionsfähigkeit der parlamentarischen Demokratie”)
- Antrag E: Sofort nach Berlin

Vom Ältestensrat des Bundestags wurde folgendes System zur Abstimmung vorgelegt: s. Tafel

# Was hat das mit Informatik zu tun?

Wahlsysteme ergeben viele informatische Fragestellungen, z.B.

- Welches Wahlverfahren benutzen wir?
- Wie schwierig ist es zu berechnen, wer gewinnt?
- Taktisches Wählen: Wie wähle ich, damit der Ausgang am besten für mich ist?
- Manipulation: Wie kann ich andere Wähler oder Kandidaten bestechen, so dass mein Favorit gewinnt?

# Was hat das mit Informatik zu tun?

Wahlsysteme ergeben viele informatische Fragestellungen, z.B.

- Welches Wahlverfahren benutzen wir?
- Wie schwierig ist es zu berechnen, wer gewinnt?
- Taktisches Wählen: Wie wähle ich, damit der Ausgang am besten für mich ist?
- Manipulation: Wie kann ich andere Wähler oder Kandidaten bestechen, so dass mein Favorit gewinnt?

⇒ Brauche Algorithmen und Aussagen über „Nichtmachbarkeit“

Wahlsysteme ergeben viele informatische Fragestellungen, z.B.

- Welches Wahlverfahren benutzen wir?
- Wie schwierig ist es zu berechnen, wer gewinnt?
- Taktisches Wählen: Wie wähle ich, damit der Ausgang am besten für mich ist?
- Manipulation: Wie kann ich andere Wähler oder Kandidaten bestechen, so dass mein Favorit gewinnt?

Im folgenden: Eigenschaften und Auswertung von einigen Wahlsystemen



## Mehrheitswahlsystem

Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen. Der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt.

eigene Wahl: Partypizza

Welchen Belag?

- Schinken
- Salami
- Pepperoni
- Pilze

## Mehrheitswahlsystem

Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen. Der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt.

Nachteil: nur wenig Information wird berücksichtigt, d.h.

- wer nicht den Gewinner wählt, wird gar nicht mehr berücksichtigt
- man hat keine Möglichkeit zum Ausdruck zu bringen, welchen Kandidaten man am wenigsten mag

Wie kann man noch wählen?

## Mehrheitswahlsystem

Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen. Der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt.

Nachteil: nur wenig Information wird berücksichtigt, d.h.

- wer nicht den Gewinner wählt, wird gar nicht mehr berücksichtigt
- man hat keine Möglichkeit zum Ausdruck zu bringen, welchen Kandidaten man am wenigsten mag

Wie kann man noch wählen?

**Jeder Wähler ordnet alle Kandidaten nach seinen Vorlieben**

# Beispiel

- Alice und ihre Freunde (Maus, Hase, Katze) sind beim Hutmacher zum Kuchen essen eingeladen.
- Welchen Kuchen soll er backen?
- Er kann: Marzipantorte, Schokotorte, Muffins, Erdbeerkuchen



# Wie wertet man sowas aus?



Gäste (und Hutmacher) haben folgende Vorlieben:

---

Alice:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Maus:	Marzipan	>	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer
Hase:	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins	>	Marzipan
Hutmacher:	Schoko	>	Erdbeer	>	Muffins	>	Marzipan
Katze:	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer	>	Marzipan

---

# Borda vs. Condorcet

- Jean-Charles **Chevalier de Borda** (1733 – 1799)
  - ▶ Mathematiker, Physiker und Seefahrer
  - ▶ War an der Konstruktion des “Ur-Meters” beteiligt (1/10.000.000 des Abstands zwischen Nordpol und Äquator)
- Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, **Marquis de Condorcet** (1743 – 1794)
  - ▶ Philosoph und Mathematiker
  - ▶ Früher Verfechter des Frauenwahlrechts und Gegner der Todesstrafe





Gäste (und Hutmacher) haben folgende Vorlieben:

---

Alice:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Maus:	Marzipan	>	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer
Hase:	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins	>	Marzipan
Hutmacher:	Schoko	>	Erdbeer	>	Muffins	>	Marzipan
Katze:	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer	>	Marzipan

---

## Borda

Für jeden Wähler erhält der schlechteste Kandidat einen Punkt, der zweitschlechteste Kandidat zwei Punkt usw. Der Kandidat mit den meisten Punkten gewinnt.



Gäste (und Hutmacher) haben folgende Vorlieben:

---

Alice:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Maus:	Marzipan	>	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer
Hase:	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins	>	Marzipan
Hutmacher:	Schoko	>	Erdbeer	>	Muffins	>	Marzipan
Katze:	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer	>	Marzipan

---

## Condorcet

Der Kandidat, der im paarweisen Vergleich besser ist als jeder andere, gewinnt.



## Borda

Pro Wähler erhält der schlechteste Kandidat einen Punkt, der zweitschlechteste zwei, usw. Der Kandidat mit den meisten Punkten gewinnt.

## Condorcet

Der Kandidat, der im paarweisen Vergleich besser ist als jeder andere, gewinnt.

## Borda

Pro Wähler erhält der schlechteste Kandidat einen Punkt, der zweitschlechteste zwei, usw. Der Kandidat mit den meisten Punkten gewinnt.

## Condorcet

Der Kandidat, der im paarweisen Vergleich besser ist als jeder andere, gewinnt.

Pizzawahl: diesmal mit Präferenzlisten

Condorcet ist nur bedingt als Wahlsystem geeignet, da es keinen Condorcet-Gewinner geben muss

## Condorcet-Eigenschaft

Wenn es einen Condorcet-Gewinner gibt, dann soll dieser auch die Wahl gewinnen.

Condorcet ist nur bedingt als Wahlsystem geeignet, da es keinen Condorcet-Gewinner geben muss

## Condorcet-Eigenschaft

Wenn es einen Condorcet-Gewinner gibt, dann soll dieser auch die Wahl gewinnen.

weitere Eigenschaften:

- Neutralität (alle Kandidaten werden gleich behandelt)
- Unabhängigkeit von unbedeutenden Kandidaten
- Konsistenz

Welche dieser Eigenschaften erfüllt das Borda-Wahlsystem?

Condorcet ist nur bedingt als Wahlsystem geeignet, da es keinen Condorcet-Gewinner geben muss

## Condorcet-Eigenschaft

Wenn es einen Condorcet-Gewinner gibt, dann soll dieser auch die Wahl gewinnen.

weitere Eigenschaften:

- Neutralität (alle Kandidaten werden gleich behandelt)
- Unabhängigkeit von unbedeutenden Kandidaten
- Konsistenz

Im folgenden betrachten wir das einzige Wahlsystem, dass alle diese Eigenschaften besitzt.

# Das Kemeny-Verfahren

Mindestens dreimal unabhängig voneinander beschrieben:

- Condorcet (1785) für 3 Wähler
- Kemeny (1959), Erfinder der Programmiersprache Basic
- Fobes (1991) [www.votefair.org](http://www.votefair.org)

Beim Kemeny-Verfahren sucht man eine “Konsensliste”, die die “Gesamtmeinung” aller Listen am besten wiedergibt. (Gewinner ist dann der beste Kandidat der Konsensliste.)

# Das Kemeny-Verfahren

Mindestens dreimal unabhängig voneinander beschrieben:

- Condorcet (1785) für 3 Wähler
- Kemeny (1959), Erfinder der Programmiersprache Basic
- Fobes (1991) [www.votefair.org](http://www.votefair.org)

Beim Kemeny-Verfahren sucht man eine “Konsensliste”, die die “Gesamtmeinung” aller Listen am besten wiedergibt. (Gewinner ist dann der beste Kandidat der Konsensliste.)

Anwendungen:

- Metasuchmaschine
- Suche in Datenbanken
- Bewerberauswahl/Auswahl von Studenten
- Bioinformatik
- ...

# Defintion des Kemeny-Verfahrens

Der **Abstand** zwischen zwei Präferenzlisten ist die Anzahl der unterschiedlich geordneten Kandidatenpaare.

Beispiel:

Rom > Paris > Prag > London

Prag > Paris > Rom > London

“Konfliktpaare”: Rom – Paris, Rom – Prag, Paris – Prag

Der Abstand ist also 3.



# Defintion des Kemeny-Verfahrens

Der **Abstand** zwischen zwei Präferenzlisten ist die Anzahl der unterschiedlich geordneten Kandidatenpaare.

Beispiel:

Rom > Paris > Prag > London

Prag > Paris > Rom > London

“Konfliktpaare”: Rom – Paris, Rom – Prag, Paris – Prag

Der Abstand ist also 3.

## Kemeny-Punktzahl

Die Kemeny-Punktzahl einer Liste ist die Summe der Abstände zu den Eingabelisten.

# Wie findet man eine Liste mit kleinster Punktzahl?

## Kemeny-Konsensusliste

Eine Kemeny-Konsensusliste ist eine Liste mit kleinstmöglicher Punktzahl.

Wie sieht die Konsensusliste der Pizzabeläge aus?

# Wie findet man eine Liste mit kleinster Punktzahl?

## Kemeny-Konsensusliste

Eine Kemeny-Konsensusliste ist eine Liste mit kleinstmöglicher Punktzahl.

Wie sieht die Konsensusliste der Pizzabeläge aus?

NP-Schwer, allerdings noch lösbar für wenige Kandidaten

Die Anzahl der Möglichkeiten wächst sehr schnell:

$$14! > 10^{11}$$

$$50! > 10^{64}$$

$$100! > 10^{157}$$

# Wie findet man eine Liste mit kleinster Punktzahl?

Typische Situation bei Metasuchmaschinen oder Bewerbungen:  
Viele Kandidaten und wenig Wähler

Kann man auch ausnutzen, dass man nur wenige Wähler hat?

# Wie findet man eine Liste mit kleinster Punktzahl?

Typische Situation bei Metasuchmaschinen oder Bewerbungen:  
Viele Kandidaten und wenig Wähler

Kann man auch ausnutzen, dass man nur wenige Wähler hat?

Nein, ist schon schwierig (NP-schwer) wenn es nur vier Wähler gibt.

Allerdings sind auch hier nicht alle Instanzen schwer...

## Fragen?

