

Zwei Ausflüge in die Algorithmik

2. Teil: Wahlsysteme

Nadja Betzler und Rolf Niedermeier

Theoretische Informatik I / Komplexitätstheorie
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

Wahl

Gegeben: Wähler und Kandidaten

Gesucht: Gewinner

Beispiele:

„klassische“ Wahlsituationen, z.B.

- politische Wahlen
- Wahl zum Jahrgangssprecher
- Vorstandswahlen im Verein

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

Wahl

Gegeben: Wähler und Kandidaten

Gesucht: Gewinner

Beispiele:

Entscheidungen im Freundeskreis oder in der Freizeit

- Ausgehen: In welche Kneipe/Disko gehen wir?
- Party: Welche Musik sollen wir hören?
- Urlaub: Welches Ziel?

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

Wahl

Gegeben: Wähler und Kandidaten

Gesucht: Gewinner

Beispiele:

Wirtschaft

- Gremium entscheidet welche Projekte gefördert werden
- Personalabteilung wählt aus vielen Bewerbern

Ziel einer Wahl ist es, eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, d.h. sich zu einigen.

Wahl

Gegeben: Wähler und Kandidaten

Gesucht: Gewinner

Beispiele:

Wirtschaft

- Gremium entscheidet, welche Projekte gefördert werden
- Personalabteilung wählt aus vielen Bewerbern

Hier wenige Wähler und viele Kandidaten!!

Was hat das mit Informatik zu tun?

Wahlsysteme ergeben viele informatische Fragestellungen, z.B.

- Welches Wahlverfahren benutzen wir?
- Wie schwierig ist es zu berechnen, wer gewinnt?
- Taktisches Wählen: Wie wähle ich, damit der Ausgang am besten für mich ist?
- Manipulation: Wie kann ich andere Wähler oder Kandidaten bestechen, so dass mein Favorit gewinnt?

Was hat das mit Informatik zu tun?

Wahlsysteme ergeben viele informatische Fragestellungen, z.B.

- Welches Wahlverfahren benutzen wir?
- Wie schwierig ist es zu berechnen, wer gewinnt?
- Taktisches Wählen: Wie wähle ich, damit der Ausgang am besten für mich ist?
- Manipulation: Wie kann ich andere Wähler oder Kandidaten bestechen, so dass mein Favorit gewinnt?

⇒ Brauche Algorithmen und Aussagen über „Nichtmachbarkeit“

Was hat das mit Informatik zu tun?

Wahlsysteme ergeben viele informatische Fragestellungen, z.B.

- Welches Wahlverfahren benutzen wir?
- Wie schwierig ist es zu berechnen, wer gewinnt?
- Taktisches Wählen: Wie wähle ich, damit der Ausgang am besten für mich ist?
- Manipulation: Wie kann ich andere Wähler oder Kandidaten bestechen, so dass mein Favorit gewinnt?

Jetzt:

- 1. Manipulation von Mehrheitswahlen**
- 2. Andere Wahlverfahren**

Mehrheitswahlen

- Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen
- Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt

Mehrheitswahlen

- Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen
- Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt

Manipulation

Gegeben: Information wie die Wahl ausgehen würde

Frage: Wie kann ich erreichen, dass mein Favorit gewinnt?

Mehrheitswahlen

- Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen
- Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt

Manipulation

Gegeben: Information wie die Wahl ausgehen würde

Frage: Wie kann ich erreichen, dass mein Favorit gewinnt?

Mögliche Aktionen:

- Löschen von Wählern
- Löschen von Kandidaten
- Hinzufügen von Wählern
- Beeinflussen von Wählern

Mehrheitswahlen

- Jeder Wähler darf einen Kandidaten wählen
- Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt

Manipulation

Gegeben: Information wie die Wahl ausgehen würde

Frage: Wie kann ich erreichen, dass mein Favorit gewinnt?

Mögliche Aktionen:

- **Löschen von Wählern**
- **Löschen von Kandidaten**
- Hinzufügen von Wählern
- Ändern von Stimmabgaben

Welche CD sollen wir spielen?

- Jennifer Lopez
- Red Hot Chili Peppers
- Madonna
- Shakira
- Christina Aguilera
- Robbie Williams
- Justin Timberlake

Situation:

Schulklasse: 25 Schüler **würden** folgendermaßen wählen:

Interpret	Anzahl Stimmen
Jennifer Lopez	3
Red Hot Chili Peppers	5
Madonna	2
Shakira	5
Christina Aguilera	2
Robbie Williams	4
Justin Timberlake	4

Kathrin möchte unbedingt Robbie Williams hören.

Situation:

Schulklasse: 25 Schüler **würden** folgendermaßen wählen:

Interpret	Anzahl Stimmen
Jennifer Lopez	3
Red Hot Chili Peppers	5
Madonna	2
Shakira	5
Christina Aguilera	2
Robbie Williams	4
Justin Timberlake	4

Kathrin möchte unbedingt Robbie Williams hören.

Aktion: Bestechung

Sie überzeugt Mitschüler nicht an der Wahl teilzunehmen.

Algorithmus

Für alle Kandidaten (Interpreten) außer Robbie Williams:

Falls Kandidat mindestens so viele Wähler hat wie Robbie
berechne $d := \text{Stimmen Kandidat} - \text{Stimmen Robbie}$
lösche $d + 1$ Wähler des Kandidaten

Algorithmus

Für alle Kandidaten (Interpreten) außer Robbie Williams:

Falls Kandidat mindestens so viele Wähler hat wie Robbie
berechne $d := \text{Stimmen Kandidat} - \text{Stimmen Robbie}$
lösche $d + 1$ Wähler des Kandidaten

⇒ Manipulation lässt sich einfach durchführen

2. Beispiel: Manipulation durch Löschen von Kandidaten

Situation:

- Kathrin trifft sich abends mit Freunden
- Möchten per Mehrheitswahlen festlegen, welche CD sie hören
- Kathrin möchte wieder unbedingt Robbie Williams hören
- Freunde nicht bestechlich (schon genervt)

Aktion: Kandidaten löschen

D.h. (möglichst wenige) CD's verstecken, so dass Robbie aus den restlichen gewählt wird.

Situation:

- Kathrin trifft sich abends mit Freunden
- Möchten per Mehrheitswahlen festlegen, welche CD sie hören
- Kathrin möchte wieder unbedingt Robbie Williams hören
- Freunde nicht bestechlich (schon genervt)

Aktion: Kandidaten löschen

D.h. (möglichst wenige) CD's verstecken, so dass Robbie aus den restlichen gewählt wird.

Dazu muss Kathrin das Ergebnis kennen, das aus dem Verstecken einer CD folgt, d.h. was ihre Freunde wählen würden, wenn sie ihren Favoriten nicht mehr wählen können.

Von Kathrin zusammengestellte Listen der Vorlieben ihrer Freunde:

Michael:	Peppers >	Shakira >	J. Lo >	Robbie >	Christina >	Madonna >	Justin
Hannes:	J. Lo >	Shakira >	Robbie >	Justin >	Madonna >	Peppers >	Christina
Jana:	Madonna >	Christina >	Robbie >	J. Lo >	Justin >	Shakira >	Peppers
Lisa:	Justin >	Shakira >	J. Lo >	Robbie >	Christina >	Peppers >	Madonna
Kathrin:	Robbie >	J. Lo >	Justin >	Madonna >	Peppers >	Christina >	Shakira
Rolf:	Madonna >	Robbie >	Peppers >	Shakira >	Justin >	J. Lo >	Christina
Sandra:	Peppers >	Justin >	Shakira >	Robbie >	Christina >	Madonna >	J. Lo

$A > B$ bedeutet A wird gegenüber B bevorzugt

Von Kathrin zusammengestellte Listen der Vorlieben ihrer Freunde:

Michael:	Peppers	>	Shakira	>	J. Lo	>	Robbie	>	Christina	>	Madonna	>	Justin
Hannes:	J. Lo	>	Shakira	>	Robbie	>	Justin	>	Madonna	>	Peppers	>	Christina
Jana:	Madonna	>	Christina	>	Robbie	>	J. Lo	>	Justin	>	Shakira	>	Peppers
Lisa:	Justin	>	Shakira	>	J. Lo	>	Robbie	>	Christina	>	Peppers	>	Madonna
Kathrin:	Robbie	>	J. Lo	>	Justin	>	Madonna	>	Peppers	>	Christina	>	Shakira
Rolf:	Madonna	>	Robbie	>	Peppers	>	Shakira	>	Justin	>	J. Lo	>	Christina
Sandra:	Peppers	>	Justin	>	Shakira	>	Robbie	>	Christina	>	Madonna	>	J. Lo

$A > B$ bedeutet A wird gegenüber B bevorzugt

Mehrheitswahlen

Die roten Kandidaten werden jeweils gewählt:
Madonna und Red Hot Chilli Peppers gewinnen.

Neue Wahlsituation (ohne CDs von Madonna und Christina Aguilera)

Michael:	Peppers	>	Shakira	>	J. Lo	>	Robbie	>	Justin
Hannes:	J. Lo	>	Shakira	>	Robbie	>	Justin	>	Peppers
Jana:	Robbie	>	J. Lo	>	Justin	>	Shakira	>	Peppers
Lisa:	Justin	>	Shakira	>	J. Lo	>	Robbie	>	Peppers
Kathrin:	Robbie	>	J. Lo	>	Justin	>	Peppers	>	Shakira
Rolf:	Robbie	>	Peppers	>	Shakira	>	Justin	>	J. Lo
Sandra:	Peppers	>	Justin	>	Shakira	>	Robbie	>	J. Lo

⇒ Robbie gewinnt!!

Wie kann man das systematisch machen?
Alles ausprobieren!

Algorithmus

Für alle Teilmengen von Kandidaten

 teste, ob Robbie nach Löschen dieser Kandidaten gewinnt

Ausgabe: Eine solche Teilmenge, die am wenigsten Kandidaten enthält

Wie kann man das systematisch machen?

Alles ausprobieren!

Algorithmus

Für alle Teilmengen von Kandidaten

teste, ob Robbie nach Löschen dieser Kandidaten gewinnt

Ausgabe: Eine solche Teilmenge, die am wenigsten Kandidaten enthält

Beobachtung:

Wir müssen viel mehr Möglichkeiten durchprobieren als beim Löschen von Wählern.

Wie lange dauert das?

Für 20 Kandidaten etwa 3 ms, für 50 Kandidaten schon 12 Tage, ...

Beobachtung

Manipulation durch Löschen von Wählern kann man einfacher berechnen als Manipulation durch Löschen von Kandidaten.

Vielleicht haben wir nur den falschen Algorithmus benutzt und es geht viel schneller...

Beobachtung

Manipulation durch Löschen von Wählern kann man einfacher berechnen als Manipulation durch Löschen von Kandidaten.

Vielleicht haben wir nur den falschen Algorithmus benutzt und es geht viel schneller...

Hier hilft die $P \neq NP$ -These:

Manipulation durch Löschen von Kandidaten ist NP-schwer, d.h. man geht davon aus, dass es keinen schnellen Algorithmus gibt.

Beobachtung

Manipulation durch Löschen von Wählern kann man einfacher berechnen als Manipulation durch Löschen von Kandidaten.

Vielleicht haben wir nur den falschen Algorithmus benutzt und es geht viel schneller...

Hier hilft die $P \neq NP$ -These:

Manipulation durch Löschen von Kandidaten ist NP-schwer, d.h. man geht davon aus, dass es keinen schnellen Algorithmus gibt.

⇒ Schlecht für Kathrin, aber gut, wenn man ein manipulationssicheres Wahlsystem möchte!!

Auf welche Art bestimme ich Gewinner?

Bisher: Mehrheitswahlsystem

Nachteil: nur wenig Information berücksichtigt, d.h. wer nicht Gewinner wählt, wird gar nicht mehr berücksichtigt

Es gibt noch viele andere Möglichkeiten:

- Jeder Wähler bewertet jeden Kandidaten mit „ja“ oder „nein“, der Kandidat, der am häufigsten „ja“ erhält gewinnt

Auf welche Art bestimme ich Gewinner?

Bisher: Mehrheitswahlsystem

Nachteil: nur wenig Information berücksichtigt, d.h. wer nicht Gewinner wählt, wird gar nicht mehr berücksichtigt

Es gibt noch viele andere Möglichkeiten:

- Jeder Wähler bewertet jeden Kandidaten mit „ja“ oder „nein“, der Kandidat, der am häufigsten „ja“ erhält gewinnt
- Jeder Wähler verteilt Punkte auf Kandidaten, der Kandidat, der am meisten Punkte hat gewinnt

Auf welche Art bestimme ich Gewinner?

Bisher: Mehrheitswahlsystem

Nachteil: nur wenig Information berücksichtigt, d.h. wer nicht Gewinner wählt, wird gar nicht mehr berücksichtigt

Es gibt noch viele andere Möglichkeiten:

- Jeder Wähler bewertet jeden Kandidaten mit „ja“ oder „nein“, der Kandidat, der am häufigsten „ja“ erhält gewinnt
- Jeder Wähler verteilt Punkte auf Kandidaten, der Kandidat, der am meisten Punkte hat gewinnt
- **Jeder Wähler ordnet alle Kandidaten nach seinen Vorlieben,**
verschiedene Auswertungsmöglichkeiten

Wir betrachten jetzt ein Wahlsystem bei dem jeder Wähler alle Kandidaten nach seinen Vorlieben ordnet.

- 1785 vom Marquis de Condorcet eingeführt
- 1876 von Lewis Carroll erweitert

Anwendung: z.B. bei der Bestimmung des Projektleiters der freien Linuxdistribution DEBIAN

Beispiel:

- Alice und ihre Freunde (Maus, Hase, Katze) sind beim Hutmacher zum Kuchen essen eingeladen.
- Welchen Kuchen soll er backen?
- Er kann: Marzipantorte, Schokotorte, Muffins, Erdbeerkuchen



Condorcets und Carrolls Wahlsystem



Gäste (und Hutmacher) haben folgende Vorlieben:

Alice:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Maus:	Marzipan	>	Muffins	>	Erdbeer	>	Schoko
Hase:	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins	>	Marzipan
Hutmacher:	Schoko	>	Erdbeer	>	Muffins	>	Marzipan
Katze:	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer	>	Marzipan

Condorcets und Carrolls Wahlsystem



Gäste (und Hutmacher) haben folgende Vorlieben:

Alice:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Maus:	Marzipan	>	Muffins	>	Erdbeer	>	Schoko
Hase:	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins	>	Marzipan
Hutmacher:	Schoko	>	Erdbeer	>	Muffins	>	Marzipan
Katze:	Muffins	>	Schoko	>	Erdbeer	>	Marzipan

Condorcet

Der Kandidat, der im paarweisen Vergleich besser ist als jeder andere, gewinnt.

Eigene Wahl:

Ziel der Klassenfahrt:

- Rom
- Paris
- Barcelona
- London

Abgabe von Liste mit Vorzügen,

z.B.: Rom > Paris > Barcelona > London

Problem

Es muss keinen Condorcet-Gewinner geben.

3 Kuchen:

- Erdbeer besser als Schoko
- Schoko besser als Muffins
- Muffins besser als Erdbeer

Problem

Es muss keinen Condorcet-Gewinner geben.

3 Kuchen:

- Erdbeer besser als Schoko
- Schoko besser als Muffins
- Muffins besser als Erdbeer

Ausweg:

Lewis Carroll

Der Kandidat, der am „nächsten“ zum Condorcet-Gewinner ist gewinnt.

Wenn Alice und ihre Freunde sich anders entschieden hätten:

Alice:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Maus:	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins
Hase:	Erdbeer	>	Schoko	>	Muffins	>	Marzipan
Hutmacher:	Muffins	>	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko
Katze:	Muffins	>	Marzipan	>	Erdbeer	>	Schoko

Lewis Carroll

Der Kandidat, der am „nächsten“ zum Condorcet-Gewinner ist gewinnt.

Abstandsmaß: Minimale Anzahl von Vertauschungen benachbarter Kandidaten

Fragen?

