Graphen als Modelle der Wirklichkeit

Jiehua Chen

14. April 2009

Im Rahmen des Seminars *Modellanalyse* werden verschiedene wissenschaftliche Themengebiete wie *Integralrechnung*, *Entity-Relationship-Modell* und *Wahrscheinlichkeitstheorie* im Sinne von Modellen betrachtet und analysiert. Die Tatsache, dass jedes dieser Gebiete als ein Modell nur innerhalb einer bestimmten Disziplin der Wissenschaften verstanden wird und vom Betrachter bzw. von der Zeit der Betrachtung abhängt, ist ein wichtiger Ausgangspunkt. Die Auffassung als Modell ist also kein objektives Ergebnis.

Die Aussage, dass **graphentheoretische Modelle** Anwendung in vielen Bereichen der Natur-, Sozial- und Ingenieurwissenschaften finden, wird zwar allgemein akzeptiert. Sie setzt jedoch voraus, dass man über einige grundlegende Kenntnisse verfügt. So ist die Frage danach, worum es bei einem graphentheoretischen Modell geht, nicht einfach und in Kürze zu beantworten. Beschäftigt man sich mit graphentheoretischen Modellen, wird man oft zwei Beziehungen klären müssen: *Wovon* und *wofür* sind die in der Graphentheorie vorkommenden Gegenstände Modelle[1].

Graphen, die der zentrale Gegenstand der Graphentheorie sind, stehen daher in dieser Ausarbeitung im Mittelpunkt und werden in Abschnitt 3 genauer betrachtet. Es wird außerdem noch nach Kontexten gesucht, in denen die Graphen als Modelle aufzufassen sind, und die Herstellungs-, Anwendungs- und die Beurteilungssichtweise mit berücksichtigt. Die Begrifflichkeiten wie *Modell des Modellseins*, *Modell von etwas*, *Modell für etwas*, *der Cargo eines Modells* etc. beziehen sich auf Professor Mahrs Arbeiten [Mah03, Mah08a, Mah08b].

Bei der Frage nach der Bedeutung der Graphentheorie als Modelltheorie bzw. der Graphen als Modelle liegt es nahe, zuerst einen Blick auf die historische Entwicklung zu werfen. Eine vollständige Untersuchung der Geschichte der Graphentheorie würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Im Folgenden wird daher nur ein kurzer historischer Abriss gegeben, der sich an *„Graph Theory 1736 - 1936“* von Biggs, Lloyd und Wilson [BLW76] orientiert.

1 Ein Blick auf die Entwicklung der Graphentheorie

In seinem Aufsatz *„Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis“* [2], der als die erste Publikation über die Graphentheorie gilt, hat der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler im Jahr 1736 den Begriff *Geometrie der Lage* erstmals erwähnt, obwohl er selbst die erstmalige Verwendung Leibniz zuschrieb. Bevor er sich mit dem eigentlichen Problem befasste, nämlich der Frage, ob es möglich ist, einen Rundgang durch die Stadt Königsberg, das heutige Kaliningrad, zu machen, der jede der sieben Brücken über den Fluss Pregel[3] genau einmal benutzt, schrieb er im ersten

[1] Bei der Auffassung eines Gegenstands als Modell beobachtet Professor Bernd Mahr, dass dieser in einem Zusammenhang steht, in dem er *sowohl als Modell von etwas* betrachtet wird, *als auch als Modell für etwas*. Dadurch ist *die Identität dieses Gegenstands als Modell* bestimmt und darauf das *konzeptuelle Modell des Modellseins* aufgebaut. [Mah08b]

[2] Auf Deutsch *„Lösung eines Problems, das zum Bereich der Geometrie der Lage gehört“*. Eine deutsche Übersetzung liefert Velminskis Buch *„Leonhard Euler. Die Geburt der Graphentheorie“* [Vel09].

[3] Der Pregel heißt heutzutage Pregolya.

Abschnitt der Arbeit [Vel09]:

> „Neben jenem Bereich der Geometrie, der die Größen untersucht und zu allen Zeiten eifrig studiert wurde, gibt es noch einen anderen bis jetzt beinahe unbekannten, den Leibniz als erster erwähnt und Geometrie der Lage (Geometriam situs) genannt hat."

Was er unter der *Geometrie der Lage* verstand ist im Text sehr klar beschrieben: Die Größen und das Rechnen mit Größen sind nicht Gegenstand der Untersuchung, sondern vielmehr die Eigenschaften der Lage von Objekten.

Aus dieser Geometrie der Lage ist die Graphentheorie als ein noch junges Teilgebiet der Mathematik zusammen mit der Topologie hervorgegangen. Sie beschäftigt sich mit der Darstellung von Objekten und deren Beziehungen untereinander. Im Gegensatz zu vielen anderen Zweigen der Mathematik liegt ihr kein fundamentales Problem der Berechnung oder Messung zugrunde. Vielmehr wurde sie aus Problemen heraus entwickelt, die oft nicht viel mehr als kleine Rätsel oder Puzzle wie z.B. das Königsberger Brückenproblem oder das Springerproblem[4] waren.

Der Austausch von Ideen zwischen zwei unterschiedlichen wissenschaftlichen Bereichen hat meist positive Auswirkungen auf beide Gebiete. Die Kombination von mathematischen und chemischen Gedanken zum Beispiel inspirierte einige Begriffe einschließlich des Wortes *Graph* in der Graphentheorie. Mit seinem Artikel *„On the theory of the analytical forms called trees"* in der Zeitschrift *Philosophical Magazine* von 1857 brachte Arthur Cayley seine Arbeit über *Bäume*, eine spezielle Klasse von Graphen, mit der Struktur chemischer Verbindungen in Beziehung[5]. Sein Aufsatz war beeinflusst von einigen Arbeiten seines Freundes James Joseph Sylvester. Der englische Mathematiker Sylvester war sehr bekannt für seine einfallsreiche Begriffswahl. Er war überzeugt von einer engen Verbindung zwischen Chemie und Algebra, nachdem er die *graphische Notation*[6] kennengelernt hatte, und publizierte 1878 den Aufsatz *„Chemistry and Algebra"* im Journal *Nature* [Syl78], wo der Begriff *Graph* im heutigen Sinne zum ersten mal benutzt wurde. Die Idee, jede Struktur chemischer Verbindungen als ein Diagram bzw. Graphen darzustellen, geht aber schon bis ins Jahr 1789 auf Arbeiten des Chemikers William Higgins zurück [WP60].

Zweihundert Jahre nach dem Erscheinen von Eulers Lösung des Königsberger Problems wurde das erste Lehrbuch *„Theorie der endlichen und unendlichen Graphen"* [Kön36] zur Graphentheorie publiziert, das vom ungarischen Mathematiker Dénes König 1936 geschrieben wurde. Damit wurde das Interesse an der Graphentheorie noch weiter verbreitet und eine eigenständige Disziplin der Mathematik geboren.

2 Graphische Notation

Im Abschnitt *„Graphic Notation"* seiner *Lecture notes for chemical students* [Fra66] legte Edward Franklands seine Vorstellung über *„graphische Notation"* dar: Mit Hilfe der graphischen Notation wird weder die Form der Moleküle noch die relative Position der darin enthaltenen Atome repräsentiert, sondern lediglich eine statische Darstellung der Anordnung von einzelnen Atomen. Die Kanten, die die Atome einer chemischen Struktur verbinden, dienen nur zur Veranschaulichung der genauen Struktur der Bindungen.

[4]Gefragt ist, wie ein Springer alle N^2 Felder eines $N \times N$- Schachbretts genau einmal in einem kontinuierlichen Zug erreichen kann.

[5]Der Begriff *Baum* wurde von Cayley als erstem veröffentlicht [Cay57], obwohl das Konzept schon 10 Jahre früher von G. K. C von Staudt [vS47] und G. R. Kirchhoff [Kir47] eingeführt wurde. Aus diesem hat sich beispielsweise die Datenstruktur „Suchbaum" entwickelt, die in erster Linie zur effizienten Speicherung und Verwaltung von großen Datenmengen in der Informatik eingesetzt wird.

[6]Viele Wissenschaftler trugen zum Begriff *Graphische Notation*, auf Englisch *Graphic notation*, bei. Unter anderem waren der deutsche Chemiker Friedrich August Kekulé von Stradonitz, der englische Chemiker Edward Frankland und der englische Mathematiker William Kingdon Clifford daran beteiligt.

Ein Beispiel der chemischen Struktur der Salpetersäure verdeutlicht diese Idee. In Abbildung 1 sind die symbolische und die graphische Formel[7] der Salpetersäure dargestellt. Man sieht, dass zwei der Sauerstoffsatome mit beiden Bindungen mit dem Stickstoff verknüpft sind, während das dritte Sauerstoffatom sowohl mit dem Stickstoff als auch mit dem Wasserstoff verbunden ist.

HNO_3

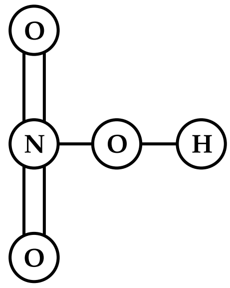


Abbildung 1: symbolische und graphische Formeln der Salpetersäure

In der sogenannten *graphischen Notation* erahnt man schon das Graphenkonzept im heutigen Sinne: Die Atome einer chemischen Verbindung werden durch Kreise mit den jeweiligen chemischen Symbolen der Elemente symbolisiert, die Bindungen durch Kanten. Mittels der graphischen Notation ist die chemische Struktur nun eindeutig bestimmt und z.B. die Frage geklärt, warum manche chemische Stoffe trotz ihrer gleichen Summenformel unterschiedliche chemische, physikalische und biologische Eigenschaften zeigen: Die Atome in unterschiedlichen Stoffen sind unterschiedlich verknüpft.[8]

Die Chemiker haben bei der Erforschung der chemischen Verbindungen die graphische Notation eingesetzt. Die Verhältnisse der Atome zueinander werden dadurch sichtbar, indem die entsprechende graphische Formel als chemisches Modell für die Struktur der jeweiligen chemischen Substanz verstanden wird. Dank der graphischen Notation wird die Existenz der Isomere bildlich klar und sofort einsehbar.

3 Graphen

Ein besonderer Reiz der Graphentheorie liegt in ihrer Anschaulichkeit und der Vielfalt der verwendbaren Beweistechniken. Als zentraler Begriff der Graphentheorie wird daher hier das Konzept von *Graphen* näher betrachtet. Eine mögliche Definition der Graphen befindet sich z.B. in Königs Artikel „Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre“ [Kön16]:

> Es sei eine endliche Anzahl von Punkten gegeben; gewisse Paare, die man aus diesen Punkten auswählen kann, sollen durch eine oder mehrere Kanten verbunden werden. Eine auf diese Weise entstehende Figur wird im allgemeinen als ein *Graph* bezeichnet.

Diese Definition wird nach heutiger Klassifikation als *Multigraph* bezeichnet. Die üblichste Definition der Graphen lautet jedoch:

Definition 3.1 *Ein* Graph *ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$, wobei $[V]^2$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V ist.*

- *Die Elemente von V nennt man die* Ecken *oder* Knoten *des Graphen G.*

[7] Die symbolischen Formeln werden heute als Summenformeln bezeichnet, die graphischen als Konstitutionsformeln.
[8] Solche chemischen Verbindungen werden heutzutage als *Isomere* bezeichnet.

- *Die Elemente von E nennnt man die* Kanten *des Graphs G.*

Bildlich kann man einen Graphen G darstellen, indem man die Knoten als Punkte zeichnet und jeweils zwei dieser Punkte genau dann durch eine Linie verbindet, wenn zwischen den entsprechenden Knoten eine Kante existiert. Die Graphen in Definition 3.1 heißen auch *einfache Graphen* und sind nicht gerichtet. Es gibt aber noch andere Typen von Graphen innerhalb der Graphentheorie wie *Multigraph*, *Digraph*, *Gewichteter Graph*, *Hypergraph* etc. und ihre Kombinationen, auf die hier nicht tiefer eingegangen wird.

Graphen geben einen Eindruck von Bildlichkeiten, etwa wie Gemälde oder Diagramme. Dies geht aber nur, wenn die Menge der betrachteten Knoten und Kanten nicht all zu groß ist, d.h. wenn man eine übersichtliche Veranschaulichung durch geschicktes „Malen" der Knoten und Kanten erhalten kann. Die Idee, manche Probleme als Graphen darzustellen, stellt gewisse Ansprüche an das Abstraktionsvermögen. Aber die Theorie, die mit solchen Strukturen umgeht, bietet als Ausgleich dafür eine Möglichkeit, die Lösungen dieser Probleme aus der Darstellung als Graph zu gewinnen. In Abbildung 2[9] findet man Eulers berühmte Zeichnung zum Königsberger Brückenproblem. Sie veranschaulicht die Lagebeziehung der 7 Brücken, die durch a, b, c, d, e, f und g gekennzeichnet sind, der Insel Kneiphof (A) und der anderen 3 durch den Fluss Pregel geteilten Gebiete B, C und D. Euler hat aber nicht nur die Unlösbarkeit des konkreten Brückenproblems in Königsberg mittels der Zeichnung bewiesen, sondern auch eine Art Lösungsmuster zu allgemeinen Brückenproblemen angegeben. Darin erkennt man vielleicht noch nichts von modernen Graphen. Abstrahiert man Eulers Zeichnung jedoch entprechend weiter, nämlich die Gebiete (A, B, C und D) als Knoten und die Brücken (a, b, c, d, e, f und g) als Kanten eines Graphen, verschwinden zwar die geographischen Informationen wie Flussumrisse und Stadtteile , aber gleichzeitig erlangt man eine elegante modellartige Problembeschreibung. Diese Möglichkeit, verschiedenste Probleme auf ähnliche Weise abstrakt darzustellen und mit einheitlichen Methoden zu bearbeiten, macht die Graphentheorie so attraktiv. Die Abbildung 3[10] gibt eine Illustration der Abstraktion von Eulers originaler Zeichnung.

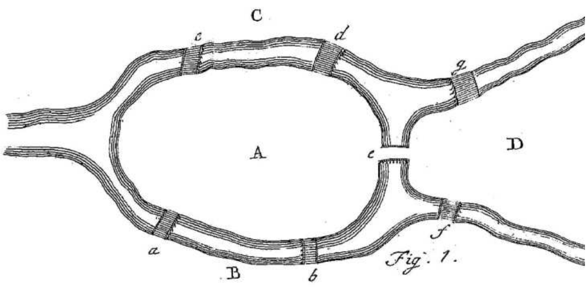


Abbildung 2: Eulers Zeichnung zum Königsberger Brückenproblem

4 Rundreisen in Graphen

Unterschiedliche Begriffe wie *Zusammenhänge*, *Wege*, *Färbungen* und *Netzwerke* bereichern den Inhalt der Graphentheorie. Sie sind Grundlagen der Modellierung von Problemen. Diese Ausarbeitung kann jedoch den Umfang eines Lehrbuchs der Graphentheorie nicht abdecken und verweist daher für die Begriffsdefinitionen auf Professor Diestels *„Graphentheorie"* [Die06]. Geht

[9] Sie stammt aus Professor Mahrs *„Denken in Modellen. Zur Lösung des Königsberger Brückenproblem"* [Mah09].
[10] Vgl. *„Denken in Modellen. Zur Lösung des Königsberger Brückenproblem"* [Mah09].

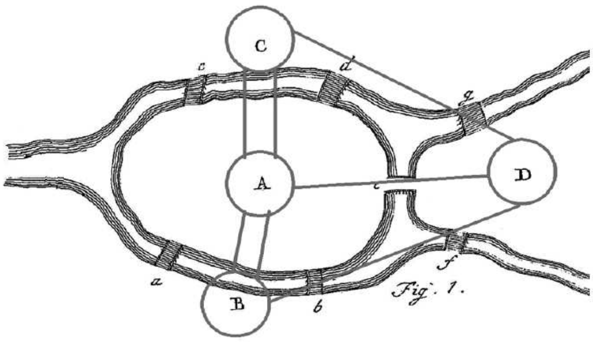


Abbildung 3: Eulers Zeichnung als Modell mit eingezeichnetem Cargo

man nun einen Schritt weiter und definiert die Begriffe *Eulerweg bzw. -kreis*[11]:

Definition 4.1 *Gegeben ein Graph* $G = (V, E)$[12].

- *Ein* Eulerweg *in G ist ein* Weg, *der jede Kante von G genau einmal benutzt.*
- *Ein* Eulerkreis *ist ein geschlossener Eulerweg.*

Dann kann man die Sätze, die Euler durch das Königsberger Brückenproblem erstmals herausgefunden hat, wie folgt darstellen:

Satz 4.2 *Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt:*

- *Wenn G mehr als 2 Knoten ungeraden Grades hat, dann enthält G keinen Eulerweg bzw. -kreis.*
- *Wenn G keine oder 2 Knoten ungeraden Grades hat, dann enthält G einen Eulerkreis bzw. -weg.*

Damit haben sich die Graphen und Eulers Satz als ein nützliches Werzeug etabliert. Denn sie sind nicht nur für diese konkrete Frage nach der Existenz eines Rundgang in Königsberg anwendbar, sondern für die gesamte Klasse der Brückenprobleme.[13] D.h. der von einem gewissen Brückenproblem konstruierten Graph, sei er diagrammlich einsichtlich oder gedanklich strukturell erfassbar, kann bei der Entscheidung als ein Modell von der kontreten Problemsituation dienen. Man arbeitet weitgehend nur an diesem Modell und überprüft die Bedingung für einen möglichen Rundgang nach in Satz 4.2 beschriebenen Kriterium. Am Ende bekommt man eine eideutige Aussage, ob ein gewünschter Spazierweg existiert oder nicht.

5 Vierfarbenproblem

Das Vierfarbenproblem ist sicherlich eines der bekanntesten Probleme in der Graphentheorie: Daraus sind der Teilzweig der Graphenfärbung und unter anderem auch der Begriff *Chromatische*

[11] Die Definitionen der benötigten Begriffe wie *Wege*, *Grad eines Knotens* und *Zusammenhänge* kann man z.B. in [Die06] nachschlagen.

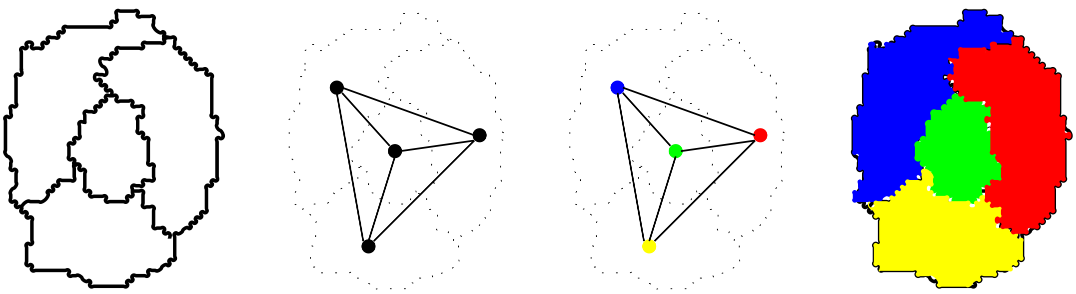
[12] Für den Graphen, der hier verwendet wird, wird allgemein nicht gefordert, dass zwischen zwei Knoten höchstens eine Kante existiert.

[13] Euler erwähnte eine mögliche Lösung zur Existenzfrage eines solchen Spazierweges in Königsberg, nämlich durch eine genaue Aufzählung aller möglichen Gänge. Er hielt dies für zu mühsam und schwierig und entwickelte deswegen eine „einfache" Methode, die heute als Ursprung der Graphentheorie gilt.

Zahl[14] entstanden. Es geht dabei um eine sehr realistische Frage im Alltag, nämlich ob es möglich ist, die Länder einer Landkarte stets so mit vier Farben zu färben, dass keine zwei Länder mit gemeinsamer Grenze gleich gefärbt sind. Angeblich hat ein gewisser Francis Guthrie 1852 bei der Färbung der Landkarte von England die These aufgestellt, dass vier Varben ausreichen sollten. Er teilte seinen Gedanken seinem Bruder Frederick Guthrie mit, der damals einer von Augustus De Morgans Studenten war. De Morgan konnte den Beweis nicht führen und leitete im gleichen Jahr die Frage in einem Brief an seinen irischen Kollegen William Rowan Hamilton weiter. Bekannt wurde das Problem jedoch durch Cayleys Vortrag an der *London Mathematical Society* im Jahr 1878. Alfred Bray Kempe, der bei Cayley Mathematik studierte, gab im Jahr darauf einen vermeintlichen Beweis [Kem79], der 1890 von Heawood zum Fünffarbensatz korrigiert wurde.[15] Das Vierfarbenproblem hat seitdem viele Wissenschaftler interessiert, aber für mehr als ein Jahrhundert konnte es niemand wirklich vollständig beweisen. Erst im Jahr 1977 gelang Kenneth Appel und Wolfgang Haken ein Beweis, der auf Kempes Idee beruhte und Unterstützung durch einen Computer benötigte. Wer einen wesentlich kürzeren und einfacheren Beweis nachlesen will, sei auf N. Robertson, D. Sanders, P. D. Seymour und R. Thomas *„The four-colour theorem“* [NRT97] verwiesen.

Abgesehen von seiner langen Geschichte ist das Vierfarbenproblem für uns deswegen interessant, weil der wesentliche Schritt vom Konkreten ins Abstrakte darin besteht, das Färbungsproblem durch Graphen darzustellen: Jedes Land bzw. Gebiet wird durch einen Knoten dargestellt. Eine Kante verbindet zwei Knoten genau dann, wenn die korrespondierenden Länder eine gemeinsame Grenze besitzen. Die Frage danach, wieviele Farben ausreichen, um eine Landkarte wie gefordert so einzufärben, dass keine zwei benachbarten Länder gleiche Farben haben, wird in die Frage nach *der chromatischen Zahl*[16] des entsprechend aufgestellten Graphen umgewandelt.

In Abbildung 4a ist eine Landkarte mit 4 Ländern gegeben. Will man nun sie wie gewünscht einfärben, wird auf jedem Land nach dem oben beschriebenen Prinzip genau ein Knoten markiert und falls zwei Länder benachbart sind, eine Kante zwischen den entsprechenden Knoten eingetragen (Abbildung 4b). Der Graph in diesem Beispiel ist vollständig, d.h. alle 4 Knoten sind paarweise benachbart. Daher ist die chromatische Zahl gleich der Anzahl der Knoten. Also ist der Graph mit 4 Farben zu färben (Abbildung 4c). Kehrt man zur ursprünglichen Anforderung zurück, dann kann man die Landkarte wie in Abbildung 4d gezeigt färben.



(a) Eine Landkarte mit 4 Ländern

(b) Die Landkarte mit 4 Länder in Graphen umgewandelt

(c) Der Graph mit chromatischer Zahl 4

(d) Die Landkarte mit 4 Länder in Graphen umgewandelt

Abbildung 4: Färbungsbeispiel

Aus dem Vierfarbenproblem ist die Graphenfärbung als ein neuer Zweig innerhalb der Graphentheorie entstanden. Sie beschäftigt sich sowohl mit Knoten- als auch mit Kantenfärbungsproblemem. Bei der Knotenfärbung sollen je zwei benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben haben, während bei der Kantenfärbung keine zwei benachbarten Kanten gleich gefärbt

[14] Für die Definition bitte z.B. in [Die06] nachschlagen.

[15] Siehe 149f. *„Graphentheorie“* [Die06].

[16] Die chromatisch Zahl von einem Graphen ist die Minimalzahl von Farben, die man benötigt um ihn zu färben, so dass durch Kanten verbundene Knoten verschiedene Farben haben.

sein dürfen. Die Graphenfärbung ist für viele praktische Anwendungen einsetzbar, wie z.B. das Aufstellen von Arbeitsplänen[17] oder das Zuweisen von Registern in Prozessoren. Man erkennt hier wieder, dass das Problem dadurch aufgelöst wird, dass die Situationsbeschreibung in einem Graphen übersetzt und die Graphenfärbung als Theorie genutzt wird. Graphen dienen hier als Modelle einer bestimmten Landkarte, eines Arbeitsplanes etc.

6 Graphen und die perzipierbare Wirklichkeit

In den vorangegangenen Abschnitten wurde ein kurzer Überblick über die historische Entwicklung der Graphentheorie gegeben, und einige wichtige Probleme dargestellt, die mit Hilfe von Graphen gelöst wurden und dementsprechend einige der wichtigsten graphentheoretischen Begriffe hervorbrachten. Dadurch erhält man schon eine erste Vorstellung, in welchem Kontext bzw. bei welcher Art der Fragestellung die Graphen als Modell angesehen werden können, nämlich genau diejenigen, in denen die betrachteten Objekte in binären Beziehungen zueinander stehen.

Im Bereich der analytischen Chemie, die sich mit der Identifizierung und der Mengenbestimmung von chemischen Substanzen beschäftigt[18], bildet jede Konstitutionsformel die Beziehungstruktur der Atome in der untersuchten chemischen Substanz graphisch ab. Die chemischen Formeln werden nach dem Prinzip der graphischen Notation aufgestellt, geben eine abstrahierte Form der chemischen Substanz wieder und tragen als Modelle zur quantitativen, qualitativen und strukturellen Analyse bei. Durch diese modellhafte Darstellung werden die Informationen über die Bindungsbeziehungen zwischen den Atomen, aus denen die chemischen Substanzen aufgebaut sind, klar herausgestellt. Dadurch, dass die Konstitutionsformeln als Träger dieser Information dienen, sind sie als Modelle erkennbar. Die transportierte Information wird auch als Cargo dieses Modells bezeichnet.

Bei den Brückenproblemen stehen die Orte durch Brücken zu einander in Beziehung. Seine Lösungsmuster entwickelte Euler vom konkreten Königsberger Brückenproblem. Für dies ist seine Zeichnung (Abbildung 2) offenbar ein Modell, das immerhin noch einen groben Flussverlauf des Pregels und vereinfachte Formen der Brücken bzw. Gebiete wiedergibt. Aber nutzt man Eulers Kriterien[19] aus, die nur von Gebieten und Anzahl der Brücken sprechen, ist ein Graph im heutigem Sinne visualisierbar (Abbildung 3). Der allgemeine Kontext, in dem Eulers Theorie angewandt werden kann, umfasst nicht nur die Brückenprobleme. Denn ein beliebiger Graph, der nicht unbedingt planar [20] sein muss, kann auch die Existenz eines Eulerweges bzw. -kreises liefern, indem man Eulers Theorie benutzt. Solche Theorie kann man als Metamodell verstehen: Beobachtet man ein bestimmtes Problem und stellt seine Ähnlichkeit mit dem Brückenproblem fest, dann kann ein Graph nach Eulers Theorie (Satz 4.2) hergestellt werden. An diesem aufgestellten Modell überprüft man die Existenz der Lösung der gewünschten Art und bekommt eine Antwort für das ursprüngliche Problem.

Beim Färben einer Landkarte, in der benachbarte Länder unterschiedliche Farben besitzen sollen, entspricht die Beziehungsstruktur des Graphen der Nachbarschaftsstruktur zwischen den Ländern. Graphen als Modelle fungieren dabei als Brücke zwischen der wahrgenommenen Realität und der mathematischen Abstraktion des Problems. Die Theorie und Algorithmen über die Graphenfärbung wurden weitgehend untersucht, aber ihre Anwendbarkeit beschränkt sich nicht auf das Erzeugen von Landkarten. Die in Abschnitt 5 erwähnten Bereiche sind gute Beispiele für weitere Anwendungsmöglichkeiten.

[17] Die Knoten entsprechen dabei Aufgaben, und eine Kante wird zwischen zwei Aufgaben eingefügt wenn sie nicht gleichzeitig durchgeführt werden können, weil sie z.B. eine gemeinsame Resouce benötigen.

[18] `http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Chemie`

[19] Siehe z.B. §20 [Vel09] und den Satz 4.2

[20] Ein Graph heißt planar, wenn man ihn so in der Ebene zeichnen kann, dass sich die Kanten nur in ihren Endknoten schneiden. In der Realität ist z.B. vorausgesetzt, dass die Brücken sich nicht schneiden.

7 Zusammenfassung

Die Entwicklung der Theorie der Graphen, zu deren fundamentalen Bestandteilen die Begriffe der Knoten und Kanten zählen, wurde durch Ideen aus zahlreichen Gebieten der Wissenschaft beeinflusst. Im Gegenzug haben graphentheoretische Konzepte und Methoden als Instrument in viele Bereiche der Natur-, Sozial- und Ingenieurwissenschaften Einzug gehalten. Das verbindende Element dabei sind die Graphen, die in all diesen Gebieten zur Modellierung von verschiedensten und oft nur sehr vage formulierten realen Problemen verwendet werden. Um diesen Gedanken genauer zu betrachten, geht man zur anfänglichen Diskussion des Modellseins der Graphen zurück:

Dem **konzeptuellen Modell des Modellseins** zufolge kann jedes Objekt grundsätzlich als ein Modell aufgefasst werden, abhängig von der auffassenden Person, vom Zweck und von der Zeit. Beispielsweise wird die graphische Notation einer bestimmten chemischen Substanz von Chemikern als angemessenes Modell angesehen und verwendet, während sie für einen Künstler vielleicht nie von Nutzen ist und er sie daher niemals als Modell betrachten würde.

Ein als Modell aufgefasstes Objekt ist von dem gedachten Modell selbst zu unterscheiden, wie in Abbildung 5 gezeigt, wo M das Objekt und μ das Modell ist, das erst durch das Modellurteil

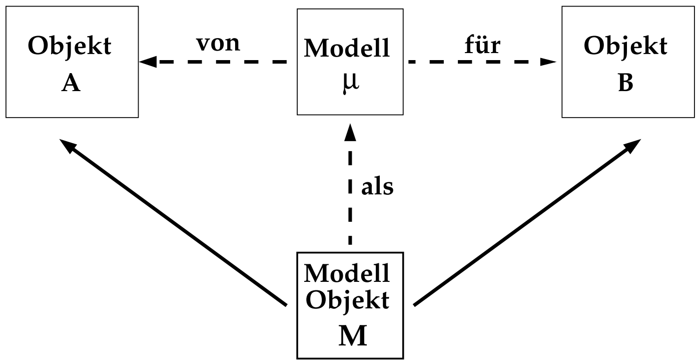


Abbildung 5: Diagramm der allgemeinen Kontexte eines Objekts M als Modell μ

entsteht. Ein Modell ist daher ein virtueller Gegenstand und kann außerdem durch mehr als ein Objekt repräsentiert werden. Anschaulich wird das anhand von Eulers Zeichnung in Abbildung 2 und des Graphen aus Abbildung 3, die beide als Modell des Königsberger Brückenproblems verstanden werden, aber offensichtlich zwei verschiedene Objekte sind.

Im Modellurteil zeigt das Diagramm in Abbildung 5 außerdem noch zwei Kontexte, in denen das Modellobjekt M mit zwei anderen Objekten A und B in Beziehung steht. So wird M in der Herstellungsperspektive als *Modell von A* gesehen, während es in der Anwendungsperspektive als ein *Modell für B* aufgefasst wird. Betrachtet man Graphen unter diesem Gesichtspunkt, so sind sie einerseits bei der Produktion *Modell von* einer Beobachtung einer bestimmten Problemsituation, wie z.B. das Färben einer gegebenen Landkarte. Andererseits dienen sie als *Modell für* die Lösung des Problems oder sogar für die Entwicklung einer weiterführenden Theorie, z.B. fungiert ein anhand einer Landkarte konstruierter Graph als Modell für die Färbungsalgorithmen. Graphen sind grundlegende Modelle für Anwendungen in vielen Bereichen, von denen wir hier nur einige wenige Beispiele nennen wollen: Petri-Netze als bipartite, gerichtete Graphen zur Modellierung nebenläufiger Systeme, Transportnetzwerke in verkehrswirtschaftlichen Optimierungsproblemen[21], das *Entity-Relationship-Modell*[22] mit Entitäten als Knoten und Beziehungen wie „ist ein“ oder „besitzt ein“ als Kanten in der semantischen Datenmodellierung, oder Soziogram-

[21] Die Untersuchung einer schnellsten Verbindung von einem Ort zu einem anderen Ort eines Verkehrsnetzes wird in der Graphentheorie als kürzester Weg behandelt, indem die Orte als Knoten und die Straßen als gewichtete Kanten modelliert werden.

[22] http://de.wikipedia.org/wiki/Entity-Relationship-Modell

me[23] zur graphischen Darstellung von Beziehungen innerhalb einer Gruppe in der Soziometrie. In diesem Sinne kann man also sagen, dass die Graphen Modelle der Wirklichkeit sind.

Literatur

[BLW76] Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, and Robin J. Wilson. *Graph Theory 1736–1936*. Oxford University Press, 1976.

[Cay57] Arthur Cayley. On the theory of the analytical forms called trees. *Philosophical Magazine*, 13, 1857.

[Die06] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer-Verlag, 2006. `http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/Graphe%ntheorieIII.counted.pdf`.

[Fra66] Edward Frankland. *Lecture notes for chemical students*. London, 1866.

[Kem79] Alfred Bray Kempe. On the Geographical Problem of the Four Colours. *American Journal of Mathematics*, 2(3):193–200, 1879.

[Kir47] Gustav Robert Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvainischer Ströme gefühert wird. *Annalen der Physik und Chemie*, 1847.

[Kön16] Dénes König. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77:453–465, 1916.

[Kön36] Dénes König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.

[Mah03] Bernd Mahr. Modellieren. Beobachtungen und Gedanken zur Geschichte des Modellbegriffs. In *Bild-Schrift-Zahl*. Wilhelm Fink Verlag, 2003.

[Mah08a] Bernd Mahr. Cargo. Zum Verhältnis von Bild und Modell. In *Visuelle Modelle*. Fink, 2008.

[Mah08b] Bernd Mahr. Ein Modell des Modellseins. Ein Beitrag zur Aufklärung des Modellbegriffs. In *Modelle*. Peter Lang Verlag, 2008.

[Mah09] Bernd Mahr. Denken in Modellen. Zur Lösung des Königsberger Brückenproblems. In *Leonhard Euler. Die Geburt der Graphentheorie*, pages 87–94. Kadmos, 2009.

[NRT97] Paul Seymour Neil Robertson, Daniel Roand Sanders and Robin Thomas. The four-colour theorem. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 70(1):2–44, 1997.

[Syl78] James Joseph Sylvester. Chemistry and algebra. *Nature*, page 284, 1878.

[Vel09] Wladimir Velminski. *Leonhard Euler. Die Geburt der Graphentheorie*. Kadmos, 2009.

[vS47] Karl Georg Christian von Staudt. *Geometrie der Lage*. Nürnberg, 1847.

[WP60] Thomas Sherlock Wheeler and James Riddick Partington. *The life and work of William Higgins, chemist (1763-1825)*. Pergamon Press, 1960.

[23] http://de.wikipedia.org/wiki/Soziogramm