Zeitlogik und Nachbarschaftssemantik

Jiehua Chen
Thi Thu Cuc Nguyen
Kahlid Aitnouh

29. März 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Zeitlogik **3**

2.1 Zeitmodellierung . . . 3
2.2 Anwendungsbereiche der Zeitlogiken . . . 4
2.3 Präzisierung der Idee von Zukunft und Vergangenheit . . . 4
2.4 Zeitstruktur und Zeitmodell . . . 5

3 Nachbarschaftssemantik **7**

3.1 Nachbarschaftsstruktur . . . 9
3.2 Klassische Modallogik auf Basis von Nachbarschaftsstrukturen . . . 10
3.3 Vergleich zur Relationalsemantik . . . 11
3.4 Eigenschaften der Nachbarschaftsstruktur . . . 12

4 Zusammenfassung **12**

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung werden zunächst die Grundlagen der Zeitlogik eingeführt und anschließend das Konzept von Nachbarschaftssemantiken betrachtet, das auf R. Montague und D. Scott zurückgeht.

Die klassische Logik beschäftigt sich mit der präzisen Formulierung von Aussagen und der Untersuchung der „Zutreffendheit" einer Aussage. Die Zeitlogik, die der Gegenstand dieser Arbeit ist, berücksichtigt zusätzlich noch die Zeitabhängigkeit von Aussagen und erlaubt eine präzise Formulierung der zeitlichen Beziehungen zwischen Aussagen. Auf dieser Grundlage haben sich sehr viele bekannte temporale Logiken wie *Linear Temporal Logic* ***LTL***, *Computation Tree Logic* **CTL** und *Computation Tree Logic** ***CTL**** etc. entwickelt.

Scott und Montague haben, beeinflusst durch ein Paper von McKinsey und Tarski von 1944, unabhängig voneinander 1970 ein neues Konzept für die Untersuchung der Modalitäten vorgestellt, das heutzutage als Nachbarschaftssemantik bezeichnet wird. Wir werden hier ihre grundlegende Technik vorstellen und den Zusammenhang zwischen *relativistischer Semantik*[1] und Nachbarschaftssemantik für Modallogik untersuchen.

2 Zeitlogik

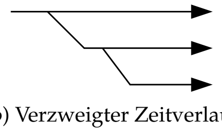
Im Lauf der Geschichte wurden sehr viele unterschiedliche Interpretationen des Zeitbegriffs entwickelt. So ging Newton beispielsweise noch von einer absoluten Zeit aus, während Einstein nur etwa 100 Jahre später entdeckte, dass Zeit schneller oder langsamer verstreichen kann, abhängig von der Bewegung des Betrachters [Geo05].

2.1 Zeitmodellierung

Da jede Zeitlogik bestimmte temporale Operatoren enthält, deren zugrunde liegendes Zeitmodell die Semantik dieser Zeitlogik direkt beeinflusst, ist es wichtig, für die Beschreibung einer Zeitlogik ein geeignetes Zeitmodell[2] anzugeben. Zeitmodelle können nach folgenden Kriterien klassifiziert werden [Kro99]:

- **Lineares oder verzweigtes Zeitmodell**: In einem linearen Zeitmodell hat jede Zeitinstanz genau einen Nachfolgezeitpunkt. Dies ist geeignet für *physikalische Zeit*. Ein verzweigtes Zeitmodell dagegen erlaubt für jede Zeitinstanz mehrere Nachfolger. Dies eignet sich beispielsweise für die Beschreibung von komplexen Berechnungsvorgängen, die an bestimmten Stellen in mehrere mögliche Abläufe verzweigen können.

(a) Linearer Zeitverlauf



(b) Verzweigter Zeitverlauf

- **Zeitpunkte oder Zeitintervalle**: Temporale Operatoren können bzgl. Zeitinstanzen oder bzgl. Zeitintervallen ausgewertet werden.
- **Diskretes oder kontinuierliches Zeitmodell**: In diskreten Zeitmodellen gibt es einen bestimmten Zeitpunkt, der den Startzustand repräsentiert. Zu jedem Zustand gibt es einen

[1] Die relativistische Semantik wird auch als Relationalsemantik, relationale Semantik oder KRIPKE-Semantik bezeichnet.

[2] Der Begriff Zeitmodell wird hier noch informell verwendet, später werden wir ihn genauer definieren.

(a) Zeitpunkte

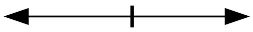
(b) Zeitintervalle

Folgezustand, dem der nächste Zeitpunkt entspricht. Dadurch bieten sich die natürlichen Zahlen zur Darstellung von Zeitpunkten an. In kontinuierlichen Zeitmodellen wird Zeit dagegen durch reelle Zahlen dargestellt.

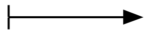
(a) Diskreter Zeitverlauf

(b) Kontinuierlicher Zeitverlauf

- **Zeitmodell mit oder ohne Vergangenheit**: Zeitmodelle unterscheiden sich darin, ob sich ihre temporalen Operatoren nur auf die Zukunft oder auch auf die Vergangenheit beziehen können. Da in den meisten Hardwaresystemen mit einem gegebenen Initialzustand gestartet wird, werden zumeist Zeitmodelle ohne Betrachtung der Vergangenheit verwendet.



(a) Zeitmodell mit Vergangenheit



(b) Zeitmodell ohne Vergangenheit

2.2 Anwendungsbereiche der Zeitlogiken

Es gibt Aussagen, deren Interpretation zeitabhängig ist. Der Wahrheitsgehalt einer Aussage wie „Der Kaffee ist heiß“ lässt sich ohne Betrachtung der Zeit nicht entscheiden, denn der Kaffee könnte zum Zeitpunkt t heiß sein, drei Tage später aber wahrscheinlich nicht mehr. Eine Lösung dieses Problems ermöglichen die aus den Modallogiken hervorgegangenen Zeitlogiken. Vor der eigentlichen Darstellung einer konkreten Zeitlogik sollen hier zunächst einige Bereiche der Informatik gezeigt werden, in denen temporale Aktivitäten eine Rolle spielen [GHR94]:

- Datenbank: Verwaltung, Aktualisierung, Darstellung zeitabhängigen Wissens und logisches Schließen aufgrund zeitbezogener Daten.
- Programmspezifikation bzw. -entwicklung und nebenläufige Programm- bzw. Prozessverifikation.
- Hardware.
- Computerlinguistische Methoden.
- Verteilte Systeme.
- Als imperative bzw. deklarative Programmiersprache.
- Planung
- Echtzeitsysteme

2.3 Präzisierung der Idee von Zukunft und Vergangenheit

Nun möchten wir die Zeitlogik einführen. Sie ist eine spezielle Modallogik, die auf der sogenannten relativistischen (oder KRIPKE-) Semantik basiert. In der relativistischen Semantik sind die Aussagen nicht von vornherein einfach nur wahr oder falsch, sondern ihr Zutreffen hängt von der vorliegenden Situation ab. Wir konzentrieren uns hier aber nicht auf die Modallogik oder relativistische Semantik. Eine genaue Beschreibung davon findet man zum Beispiel in Kap. IV §1 von W. Rautenbergs *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik* [Rau79].

Neben den bekannten Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ und $\rightarrow$ werden in der Zeitlogik vier temporale Operatoren verwendet, die Modalitäten mit Zeit kombinieren:

Operator	Bedeutung	Beispiel
$\Box\!\!-$	zukünftig immer	$\Box\!\!-\phi : \phi$ wird zukünftig immer wahr sein
$-\!\!\Box$	vergangen immer	$-\!\!\Box\ \phi : \phi$ war immer wahr
$\Diamond\!\!-$	Zukunft	$\Diamond\!\!-\ \phi : \phi$ wird wahr sein
$-\!\!\Diamond$	Vergangenheit	$-\!\!\Diamond\ \phi : \phi$ war wahr

Die Dualitäten von $\Box\!\!-$ und $\Diamond\!\!-$ bzw. $-\!\!\Box$ und $-\!\!\Diamond$ gelten hier auch, d.h. die Operatoren $\Diamond\!\!-$ and $-\!\!\Diamond$ werden wie folgt definiert:

$$\Diamond\!\!-\ \phi = \neg\Box\!\!-\neg\phi \tag{1}$$

$$-\!\!\Diamond\phi = \neg-\!\!\Box\neg\phi \tag{2}$$

Ein Beispiel mit der Aussage: *Geld verschafft Privilegien* hilft, die Gleichung (1) zu veranschaulichen.

Beispiel 2.3.1 *Sei p die Aussage* ***Geld verschafft Privilegien***

$\Rightarrow$ $\Diamond\!\!-$ *p: Es wird zukünftig mind. einmal akzeptiert werden, dass Geld Privilegien verschafft.*
$\neg$ *p : Geld verschafft keine Privilegien.*
$\Box\!\!-\neg$ *p : Es wird zukünftig immer akzeptiert werden, dass Geld keine Privilegien verschafft.*
$\neg\ \Box\!\!-\neg$ *p: Es wird zukünftig nicht immer akzeptiert werden, dass Geld keine Privilegien verschafft.*
: Es wird zukünftig mind. einmal akzeptiert werden, dass Geld Privilegien verschafft.

2.4 Zeitstruktur und Zeitmodell

Im vorigen Abschnitt wurden die wichtigsten Operatoren $\Box\!\!-$ und $-\!\!\Box$ eingeführt[3]. Da wir die Zeitlogik auf Basis der relativistischen Semanik definieren, ist der Begriff *Zeit* definiert als eine Menge von Zeiten bzw. Zuständen, die der Menge der Realitätssituationen in der relationalen Semantik entspricht.

Im Folgenden werden die Begriffe Zeitstruktur und Zeitmodell festgelegt.

Definition 2.4.1 ***(Zeitstruktur G)*** *Eine Zeitstruktur ist ein Paar* $G = (T,\ R \subseteq T \times T)$ *mit*

1. *T ist eine Menge von Zeiten (auch Zustände genannt).*
2. *R ist die entsprechende Erreichbarkeistrelation auf T, hier muss R eingeschränkt auf eine linkstotale Relation sein.*

Bemerkung 2.4.2 *Der temporale Charakter von G hängt natürlich von der Erfassung der Zeitmodellierung ab, für die einige mögliche Klassifikationskriterien in Abschnitt 2.1 kurz besprochen wurden. So ist zum Beispiel G eine lineare Struktur, wenn R eine Abbildung ist, d.h. wenn für jeden Zeitpunkt genau ein Nachfolgezeitpunkt existiert.*

Definition 2.4.3 ***(Zeitmodell M)*** *Seien* $G = (T,\ R \subseteq T \times T)$ *eine Zeitstruktur, P eine Menge von Aussagensymbolen und* $\beta : P \rightarrow \mathcal{P}(T)$ *eine Belegung, die jedem Aussagensymbol eine Teilmenge von T zuordnet.* $\beta(p)$ *nennt man die Akzeptanzmenge zu p. Das Paar* $M = (G, \beta)$ *heißt ein Zeitmodell.* β *wird auch* labeling function *von M genannt.*

Als nächstes führen wir eine Relation $\models$ (genauer $\models^{\beta}$ *oder* $\models^{M}$) ein, welche die von M bestimmte *Akzeptanzrelation* heißt, um die Werte der zusammengesetzten Formel in dem gegebenen Modell M festzulegen.

[3] $\Diamond\!\!-$ und $-\!\!\Diamond$ können dadurch definiert werden

Definition 2.4.4 ***(Akzeptanzrelation*** $\models$***)*** *Die von einem Zeitmodell* $M = (G, \beta)$ *bestimmte Akzeptanzrelation* $\models\ \subseteq T \times Form(P)$ *ist folgendermaßen induktiv definiert als Relation zwischen Zeiten aus* T *und Formeln aus* $Form(P)$*:*

$$
\begin{array}{lll}
t_1 \models p & gdw & t_1 \in \beta(p) \text{ für } p \in P \\
t_1 \models \neg\phi & gdw & t_1 \not\models \phi \\
t_1 \models \phi \wedge \psi & gdw & t_1 \models \phi \text{ und } t_1 \models \psi \\
t_1 \models \phi \vee \psi & gdw & t_1 \models \phi \text{ oder } t_1 \models \psi \\
t_1 \models \phi \rightarrow \psi & gdw & t_1 \models \phi \Rightarrow t_1 \models \psi
\end{array}
$$

kritische Akzeptanzbedingungen:

$$
\begin{array}{lll}
t_1 \models \Box\!\!-\phi & gdw & t_2 \models \phi \text{ für alle } t_2 \in T \text{ mit } t_1 R t_2 \\
t_1 \models -\!\!\Box\ \phi & gdw & t_2 \models \phi \text{ für alle } t_2 \in T \text{ mit } t_2 R t_1
\end{array}
$$

$\models$ wird auch als die Wahrheit einer Formel zu einem Zeitpunkt eines Zeitmodells M bezeichnet.

Bemerkung 2.4.5 *Aus der Definition ergeben sich die Akzeptanzbedingungen für* $\Diamond\!\!-$ *und* $-\!\!\Diamond$ *:*

$$
\begin{array}{lll}
t_1 \models \Diamond\!\!-\ \phi & gdw & t_2 \models \phi \text{ für ein gewisses } t_2 \in T \text{ mit } t_1 R t_2 \\
t_1 \models -\!\!\Diamond\ \phi & gdw & t_2 \models \phi \text{ für ein gewisses } t_2 \in T \text{ mit } t_2 R t_1
\end{array}
$$

Daraus lässt sich nun ein grundsätzlicher Begriff der Gültigkeit in Zeitlogiken definieren:

Definition 2.4.6 ***(Gültigkeiten in Zeitstrukturen bzw. Zeitmodellen)*** *Seien* $\phi \in Form(P)$ *und* G *eine Zeitstruktur.*

1. ϕ *heißt* gültig in einem Zeitmodell $M = (G, \beta)$, *symbolisch* $\models^M \phi$, *falls* $t \models^\beta \phi$ *für alle* $t \in G$.
2. ϕ *heißt* gültig in G *oder* G-Tautologie, *symbolisch* $\models^G \phi$, *falls* $\models^M \phi$ *für jedes Zeitmodell* $M = (G, \beta)$.

Die bisherigen Definitionen ermöglichen ganz allgemein die Formalisierung verschiedener Arten von temporalen Logiken. Im Folgenden wird eine bestimmte Zeitlogik erläutert, nämlich die normale Zeitlogik.

Definition 2.4.7 ***(Bimodale Logik und normale Zeitlogik)***

1. *Sei* $g = (T,\ R \subseteq T \times T)$ *eine Zeitstruktur. Dann ist die* bimodale Logik **Lg** *(Menge aller g-Tautologien) die Menge aller Formeln, die in allen Zeiten* $t \in T$ *bei allen Belegungen* $\beta : P \rightarrow \mathcal{P}(T)$ *akzeptiert werden.*
2. *Sei* G *eine Klasse von Zeitstrukturen. Dann ist die bimodale Logik* $\mathbf{L} = \mathbf{L}G := \bigcup_{g \in G} \mathbf{L}g$ *eine normale Zeitlogik, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:*
   (a) *Alle aussagenlogischen Tautologien sind in* **L** *enthalten*
   (b) **L** *ist abgeschlossen gegenüber MP:* $\frac{\phi,\ \phi\rightarrow\psi}{\psi}$
   (c) **L** *ist abgeschlossen gegenüber* MN^+*:* $\frac{\phi}{\Box\!\!-\phi}$ *und* MN^-*:* $\frac{\phi}{-\!\!\Box\phi}$
   (d) *Die folgenden Formeln gehören zu* **L***:*
      i. $\Box\!\!-(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\!\!-\phi \rightarrow \Box\!\!-\psi)$
      ii. $-\!\!\Box\ (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (-\!\!\Box\ \phi \rightarrow -\!\!\Box\ \psi)$
      iii. $\phi \rightarrow \Box\!\!-\ -\!\!\Diamond\ \phi$
      iv. $\phi \rightarrow -\!\!\Box\ \Diamond\!\!-\ \phi$

Beispiel 2.4.1 *Als Beispiel soll hier die Zeitstruktur $g := (\mathcal{R}, \leq)$ dienen, wobei $\mathcal{R}$ die Menge der reellen Zahlen ist. Es handelt sich also um einen kontinuierlichen Zeitverlauf. Wir betrachten konkret die Eigenschaft 2(d)iii in der Definition 2.4.7.*

Zu zeigen, dass $\models^G \phi \rightarrow (\ \Box\!\!-\ -\!\!\Diamond\ \phi\ )$ gilt, bedeutet zu zeigen, dass $\models^M \phi \rightarrow (\ \Box\!\!-\ -\!\!\Diamond\ \phi\ )$ für alle $M := (G, \beta)$ gilt.

Sei $\beta : P \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{R})$:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \models^M \phi \rightarrow (\ \Box\!\!-\ -\!\!\Diamond\ \phi\ ) \\
gdw & \forall t \in \mathcal{R}: & t \models \phi \rightarrow (\ \Box\!\!-\ -\!\!\Diamond\ \phi\ ) \\
gdw & \forall t \in \mathcal{R}: & (t \models \phi) \Rightarrow (t \models \Box\!\!-\ -\!\!\Diamond\ \phi\ ) \\
gdw & \forall t \in \mathcal{R}: & (t \models \phi) \Rightarrow (\forall t' \in \mathcal{R} \text{ mit } t \leq t' : t' \models -\!\!\Diamond\ \phi\ ) \\
gdw & \forall t \in \mathcal{R}: & (t \models \phi) \Rightarrow (\forall t' \in \mathcal{R} \text{ mit } t \leq t' : (\exists t'' \in \mathcal{R} \text{ mit } t'' \leq t' : (t'' \models \phi)\ ))
\end{array}
$$

Wir müssen nun zeigen, dass für alle $t \in \mathcal{R}$ mit $t \models \phi$ folgt, dass für alle $t' \in \mathcal{R}$ mit $t \leq t'$ ein $t'' \in \mathcal{R}$ mit $t'' \leq t'$ existiert und gilt: $t'' \models \phi$.
Sei $t \in \mathcal{R}$ beliebig mit $t \models \phi$.
Sei $t' \in \mathcal{R}$ beliebig mit $t \leq t'$. Also existiert ein t'' (nämlich genau t), so dass $t'' \leq t'$ und $t'' \models \phi$.

$\square$

3 Nachbarschaftssemantik

In der klassischen Aussagenlogik ist das semantische Gegenstück zu einer Formel der Wahrheitswert. Analog ist es in der relativistischen Semantik die Menge der möglichen Welten, in denen diese Formel akzeptiert wird. Jede Modallogik, die sich durch die relativistische Semantik charakterisieren lässt, ist normal, jedoch ist nicht jede normale Modallogik durch eine relativistische Semantik erfassbar. Es gilt zum Beispiel die Formel

$$\Box(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi) \tag{3}$$

in jeder relativistischen oder auch KRIPKE-Struktur[4]. Das bedeutet, modale Systeme, die durch relativistische Strukturen konstruiert sind, müssen die Formel (3) akzeptieren. Aber es gibt andere Modallsysteme, in denen sie nicht akzeptiert wird.

Ein allgemeinerer semantischer Rahmen als die relativistische Semantik ist die auf Montague und Scott zurückgehende Nachbarschaftssemantik [EMC+01]. Wie der Name schon verrät, spielt die Bedeutung der Nachbarschaft eine wichtige Rolle. Der Nachbarschafts-Begriff stammt ursprünglich aus der Topologie, wo die *Nachbarschaft* eines Punktes x eine Menge A mit $x \in A$ und ein *Nachbarschaftssystem* des Punktes x eine Sammlung solcher Nachbarschaften von x bezeichnet. Die grundlegende Idee in der Nachbarschaftssemantik ist, dass manche Situationen in besonders engen, andere in entfernteren Beziehungen zueinander stehen. Die intuitive Vorstellung, dass diese Beziehung symmetrisch sein könnte, ist bei der Nachbarschaftssemantik nicht unbedingt erfüllt. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Beispiel 3.0.2 *Zur der in Abbildung 1 gezeigten Bezirkskarte von Berlin, in der die Bezirke o1 bis o12 die Menge der Situationen bilden, fallen uns intuitiv sofort zwei Möglichkeiten ein, die Nachbarschaft von Lichtenberg (o5) zu definieren:*

1. *Wir bezeichnen als Nachbarschaft diejenigen Bezirke, die direkt an Lichtenberg (o5) angrenzen, aber ohne Lichtenberg selbst, wie in Abbildung 2 gezeigt.*

2. *Alternativ ließe sich die Nachbarschaft beispielsweise auch über den euklidischen Abstand definieren. Dabei sind alle diejenigen Bezirke in der Nachbarschaft enthalten, deren Mittelpunkte (im Bild die*

[4] Der Modaloperator $\Box$ bedeutet „notwendig".

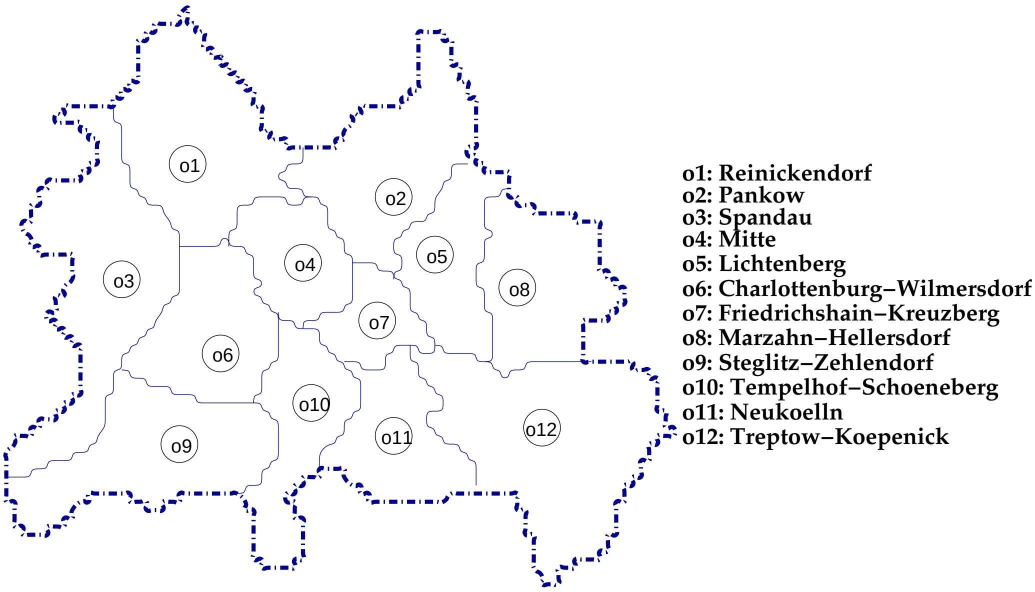


Abbildung 1: Berliner Bezirke

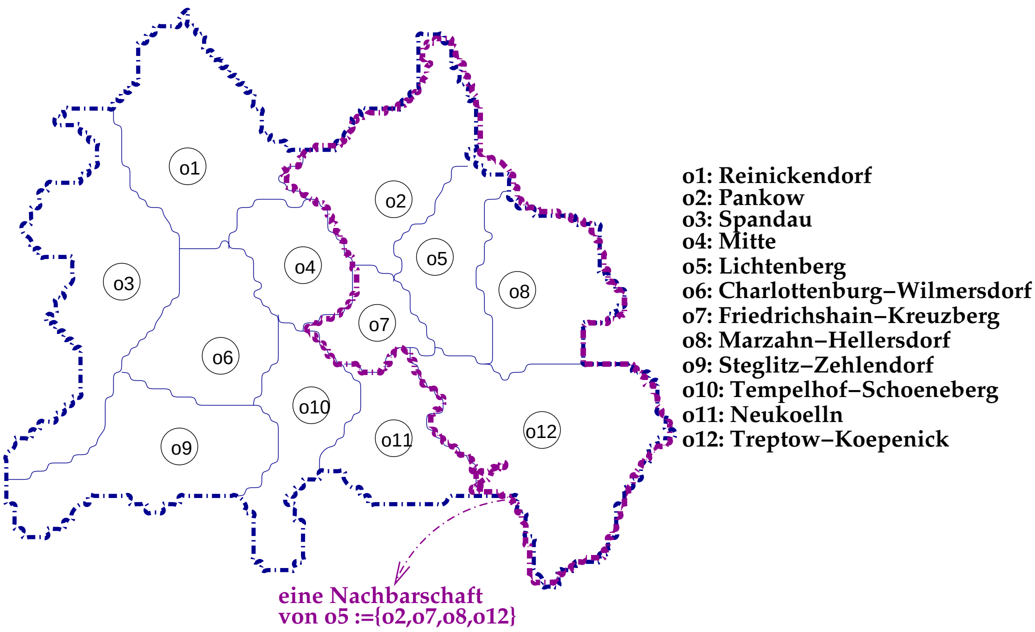


Abbildung 2: Direkte Angrenzung als Nachbarschaft

kleinen Kreise mit den Bezirksbezeichnern o1, o2, o3, usw.) vollständig innerhalb des Kreises um den Mittelpunkt von Lichtenberg liegen (Abbildung 3).

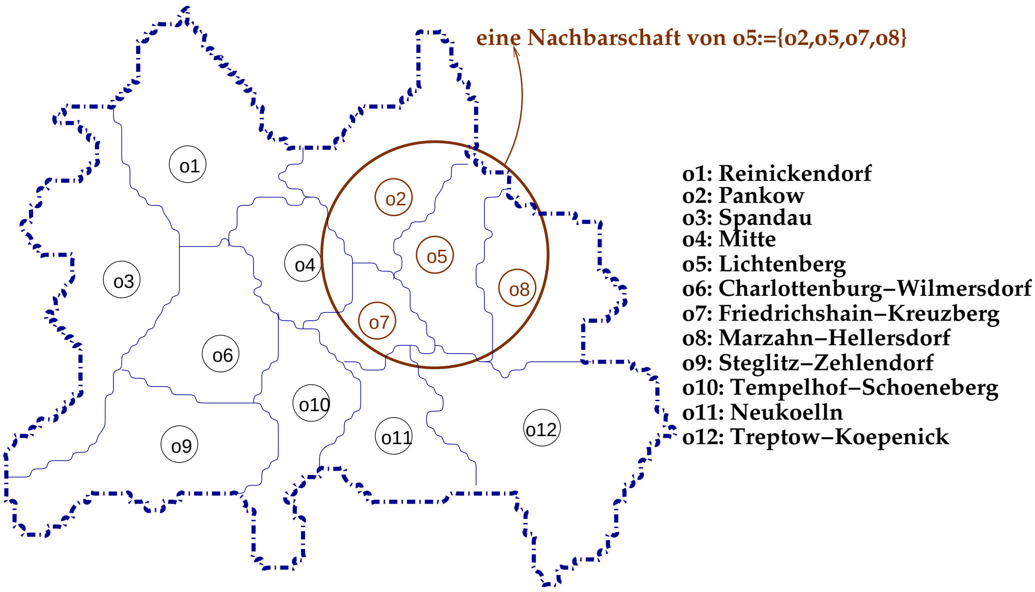


Abbildung 3: Umkreis als Nachbarschaft

Diese Art von Festlegungen der Nachbarschaft entspricht menschlicher Intuition, aber man kann auch willkürlich bestimmen, dass zum Beispiel die Nachbarschaft von Lichtenberg (o5) nur Spandau (o3) enthält.

3.1 Nachbarschaftsstruktur

Nachdem wir uns ein Beispiel angeschaut haben, definieren wir nun den zentralen Begriff der Nachbarschaftsstruktur, mit dem wir später die KRIPKE-Struktur aus der relativistischen Semantik äquivalent erfassen können. Dabei ist es wichtig im Kopf zu behalten, dass für jede Situation nicht nur eine einzige mögliche Definition von Nachbarschaft existiert, sondern im Gegenteil sehr viele verschiedene Festlegungen möglich sind, wie wir in Beispiel 3.0.2 gesehen haben. Wir wünschen uns also die größtmögliche Freiheit bei der Beschreibung der möglichen Nachbarschaften einer Situation.

Definition 3.1.1 ***(Nachbarschaftsstruktur NS)*** *Eine Nachbarschaftsstruktur ist ein Tripel* $NS = (S, N : S \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)), S_{akt})$ *mit:*

1. *S ist eine Menge von Situationen.*
2. *$N : S \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ legt für jede Situation $s \in S$ ein System $N(s)$ von Teilmengen von S fest. $N(s)$ nennt man auch Umgebungssystem von s.*
3. *Sei $S_{akt} \subseteq S$ die Menge der aktuellen Situationen. S_{akt} ist wesentlich für die Bestimmung der Gültigkeit einer Formel in NS (siehe Abschnitt 3.2).*

Bemerkung 3.1.2 *Weitere Forderungen an das Mengensystem $N(s)$ mit $s \in S$ werden nicht gestellt. Wer mit der relativistischen Semantik oder mit der Nachbarschaftsbeziehung aus der Topologie vertraut ist, für den ist dieser Begriff der Nachbarschaftsstruktur und insbesondere die Abbildung N zunächst sicher ungewöhnlich. Daher ist folgendes zu beachten:*

1. *Für jede Situation $s \in S$ bezeichnet $N(s)$ eine Menge von Nachbarschaften, d.h. eine Menge von Teilmengen von S. Im Beispiel 3.0.2 wäre z.B $N(o5) = \{\{o2, o7, o8, o12\}, \{o2, o5, o7, o8\}, \{o3\}\}$.*

2. *Eine Situation $s \in S$ muss nicht unbedingt zu ihrer eigenen Nachbarschaft gehören, d.h. s muss nicht zu einem $\pi \in N(s)$ gehören.*

3. *Für eine beliebige Situation $s \in S$ muss $N(s)$ kein Mengenfilter sein, d.h. es muss nicht unbedingt gelten, dass $\forall \pi_1, \pi_2 \subseteq S$:*

   (a) $\pi_1, \pi_2 \in N(s) \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \in N(s)$

   (b) $(\pi_1 \subseteq \pi_2 \wedge \pi_1 \in N(s)) \Rightarrow \pi_2 \in N(s)$

4. *Beziehungen zwischen Situationen sind nicht notwendigerweise symmetrisch, d.h. wenn eine Situation $s_1 \in S$ in einer Nachbarschaft von $s_2 \in S$ liegt, muss nicht zwangsweise s_2 in einer Nachbarschaft von s_1 liegen.*

5. *Ist $N(s)$ für eine bestimmte Situation $s \in S$ leer, dann heißt s* nichtnormale *Situation, ansonsten* normale *Situation.*

Die Gültigkeit der Formeln in einzelnen Situationen ist folgendermaßen definiert.

Definition 3.1.3 ***(Akzeptanzrelation in Nachbarschaftsstrukturen)*** *Seien P eine Menge von Aussagensymbolen, NS eine Nachbarschaftsstruktur und $\beta : P \to \mathcal{P}(S)$ eine Belegung. Dann ist die Akzeptanzrelation $\models \subseteq S \times Form(P)$ wie folgt induktiv definiert:*

$$\begin{array}{lll}
s \models p & gdw & s \in \beta(p) \text{ für } p \in P \\
s \models \neg\phi & gdw & s \not\models \phi \\
s \models \phi \wedge \psi & gdw & s \models \phi \text{ und } s \models \psi \\
s \models \phi \vee \psi & gdw & s \models \phi \text{ oder } s \models \psi \\
s \models \phi \to \psi & gdw & s \models \phi \Rightarrow s \models \psi \\
\boldsymbol{s \models \Box\phi} & \boldsymbol{gdw} & \boldsymbol{\{s' \in S \mid s' \models \phi\} \in N(s)}
\end{array}$$

Bemerkung 3.1.4 *Die letzte Bedingung heißt auch* kritische Akzeptanzbedingung. *Sie sagt aus, dass $\Box\phi$ in einer Situation $s \in S$ genau dann akzeptiert wird, wenn ϕ in einer gewissen Nachbarschaft von s akzeptiert wird.*

3.2 Klassische Modallogik auf Basis von Nachbarschaftsstrukturen

Die Interpretation von $\Box\phi$ in der Nachbarschaftssemantik ist nun klarer. Wollen wir entsprechend eine Modallogik definieren, werden wir wie in der Relationalsemantik zuerst die Gültigkeit einer Formel in einer Nachbarschaftsstruktur betrachten. Eine Formel ϕ heißt *gültig* in einer Nachbarschaftsstruktur $NS = (S, N, S_{akt})$, wenn $s \models \phi$ für jede aktuelle Situation $s \in S_{akt}$ und jede Belegung $\beta : P \to \mathcal{P}(S)$. ϕ wird in diesem Fall auch als *NS-Tautologie* bezeichnet. Die Menge der *NS-Tautologien* heißt **L***NS*.

Die Modallogiken, die man mit Hilfe nachbarschaftssemantischer Methoden darstellen kann, bilden eine Teilmenge der sogenannten „klassischen“ Modallogiken. Eine Modallogik ist genau dann klassisch, wenn sie unter der Regel

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\Box\phi \leftrightarrow \Box\psi} \tag{4}$$

abgeschlossen ist. Man kann leicht zeigen, dass $\mathbf{L} = \mathbf{L}NS$ eine klassische Modallogik ist [Rau79].

3.3 Vergleich zur Relationalsemantik

Wie schon ganz am Anfang dieses Kapitels angekündigt, ist die Relationalsemantik dem Konzept der Nachbarschaftssemantik untergeordnet. Ist eine KRIPKE-Struktur gegeben, können wir ihre Semantik auf eine entsprechende Nachbarschaftsstruktur übertragen. Dazu müssen wir nur die kritische Akzeptanzbedingung zwischen den beiden synchronisieren.

Satz 3.3.1 ***(Darstellbarkeit KRIPKE-Struktur durch Nachbarschaftsstruktur)*** *Sei eine* KRIPKE-Struktur $K = (S, R \subseteq S \times S)$ *gegeben. Dann ist die Nachbarschaftsstruktur* $NS = (S, N, S_{akt})$ *mit*

1. *S wird direkt übernommen.*
2. $\forall s \in S : N(s) = \{\pi \subseteq S \mid \forall s' \in S : (s, s') \in R \Rightarrow s' \in \pi\}$, *$N(s)$ enthält also alle Umgebungen, die alle Situationen $s' \in S$ mit $(s, s') \in R$ beinhalten, d.h. mindestens alle Situationen, die direkt von s erreichbar sind.*
3. $S_{akt} = S$.

äquivalent zu K, d.h. es werden genau die Formeln ϕ von NS akzeptiert, die auch von K akzeptiert werden.

Um zu zeigen, dass die so definierte Nachbarschaftsstruktur wirklich äquivalent zu der entsprechenden KRIPKE-Struktur ist, ist nur der Nachweis der Gleichwertigkeit der kritischen Akzeptanzbedingungen ((5) und (6)) in beiden Strukturen erforderlich:

$$s \models^{NS} \Box\phi \quad \text{gdw} \quad \{s' \in S \mid s' \models \phi\} \in N(s) \tag{5}$$

$$s \models^{K} \Box\phi \quad \text{gdw} \quad \forall s' \in S \text{ mit } (s, s') \in R : s' \models^{K} \phi \tag{6}$$

Dies ist durch Punkt 2 der Definition der entsprechenden Nachbarschaftsstruktur in Satz 3.3.1 sichergestellt. Im folgenden skizzieren wir eine Beweisidee für $\boldsymbol{\forall s \in S : s \models^{K} \phi \Leftrightarrow s \models^{NS} \phi}$.

Beweisidee 3.3.2 *($\forall s \in S : s \models^{K} \phi \Leftrightarrow s \models^{NS} \phi$) Sei eine KRIPKE-Struktur $K = (S, R)$ gegeben und die entsprechende Nachbarschaftsstruktur NS wie in 3.3.1 definiert.*

Sei ferner $\beta : P \to \mathcal{P}(S)$ eine beliebige Belegung und $s \in S$ eine Situation.
Der einzige nichttriviale Fall ist zu zeigen, dass $s \models^{K} \Box\phi$ äquivalent zu $s \models^{NS} \Box\phi$ ist. Der Beweis erfolgt durch strukturelle Induktion. Wir lassen den Induktionsanfang weg, denn für die atomaren Formeln sind die Definitionen von Gültigkeiten in beiden Strukturen gleich.
IV: Sei $s \models^{K} \phi \Leftrightarrow s \models^{NS} \phi$
IS: Betrachte die Formel $\Box\phi$:

$$\begin{array}{lll}
\text{“}\Rightarrow\text{”:} & & \textit{Sei } s \models^{K} \Box\phi \\
& \overset{(6)}{\Rightarrow} & \forall s' \in S \textit{ mit } (s, s') \in R : s' \models^{K} \phi \textit{ und wg. 3.3.1 Punkt 2: } \{s' \in S \mid (s, s') \in R\} \in N(s) \\
& \overset{IV}{\Rightarrow} & \forall s' \in S \textit{ mit } (s, s') \in R : s' \models^{NS} \phi \textit{ und } \{s' \in S \mid (s, s') \in R\} \in N(s) \\
& \Rightarrow & \forall s' \in \{s' \in S \mid (s, s') \in R\} \in N(s) : s' \models^{NS} \phi \\
& & \textit{und wg. 3.3.1 (2): } \pi \supseteq \{s' \in S \mid (s, s') \in R\} : \pi \in N(s) \\
& \Rightarrow & \{s' \in S \mid s' \models^{NS} \phi\} \in N(s) \\
& \overset{(5)}{\Rightarrow} & s \models^{NS} \Box\phi \\
\text{“}\Leftarrow\text{”:} & & \textit{Sei } s \models^{NS} \Box\phi \\
& \overset{(5)\&3.3.1(2)}{\Rightarrow} & \{s' \in S \mid (s, s') \in R\} \subseteq \{s' \in S \mid s' \models^{NS} \phi\} \in N(s) \\
& \overset{IV}{\Rightarrow} & \{s' \in S \mid (s, s') \in R\} \subseteq \{s' \in S \mid s' \models^{K} \phi\} \in N(s) \\
& \Rightarrow & \forall s' \in S \textit{ mit } (s, s') \in R : s' \in \{s' \in S \mid s' \models^{K} \phi\} \\
& \Rightarrow & \forall s' \in S \textit{ mit } (s, s') \in R : s' \models^{K} \phi \\
& \overset{(6)}{\Rightarrow} & s \models^{K} \Box\phi
\end{array}$$

$\Box$

Für Nachbarschaftsstrukturen, die auf die soeben beschriebene Art aus KRIPKE-Strukturen konstruiert werden, gelten folgende Eigenschaften:

Lemma 3.3.3 *Seien $\pi_1, \pi_2 \subseteq S$*

1. $\pi_1, \pi_2 \in N(s) \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \in N(s)$
2. $(\pi_1 \subseteq \pi_2 \wedge \pi_1 \in N(s)) \Rightarrow \pi_2 \in N(s)$
3. *$s \in S$ ist ein Endpunkt in R, also eine "Sackgasse" genau dann, wenn $\emptyset \in N(s)$.*

3.4 Eigenschaften der Nachbarschaftsstruktur

Man entdeckt bei der Beschreibung der Modallogik durch die Relationalsemantik manche interessante Eigenschaften, so ist zum Beispiel die Erreichbarkeitsrelation R in der gegebenen KRIPKE-Struktur $K = (S,\ R \subseteq S \times S)$ reflexiv genau dann, wenn $K \models \Box\phi \to \phi$. Genau so gibt es auch eine Korrespondenz zwischen modalen und struktuellen Eigenschaften einer Nachbarschaftsstruktur. Im Folgenden werden einige davon vorgestellt:

Lemma 3.4.1 *Sei $NS = (S, N, S_{akt})$ mit $N(s) \neq \emptyset$ für alle $s \in S$. Dann gilt:*

1. *$NS \models \Box\phi \to \phi$ gdw. $s \in \pi$ für alle $\pi \in N(s)$*
2. *$NS \models \Box\phi \to \Box\Box\phi$ gdw. $\forall s \in S : \pi \in N(s) \Rightarrow \{s' \in S \mid \pi \in N(s')\} \in N(s)$*

4 Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung wurden mit der Zeitlogik und der Nachbarschaftssemantik zwei getrennten Themen vorgestellt, die im Rahmen der Modallogiken von Bedeutung sind.

Die hier angesprochenen Grundlagen der Zeitlogik sind nicht zwangsläufig für ein Verständnis der speziellen temporalen Logiken wie ***LTL***, ***CTL*** und ***CTL***** notwendig. Sie vermitteln vielmehr eine allgemeine Vorstellung der Modallogik mit Zeitbegriff und was man bei der Formulierung einer temporalen Logik beachten sollte. Als ein Beispiel dafür wurde eine um einen Zeitbegriff erweiterte normale Modallogik angegeben.

Innerhalb der Modallogik gibt es zahlreiche theoretische Modelle bzgl. der Relationalsemantik. Ein mächtigeres Werkzeug ist die Nachbarschaftssemantik, die im Rahmen dieser Ausarbeitung eingeführt wurde. Sie bietet eine elegante Methode, um einen Teil der klassischen Modallogiken zu modellieren, die sich nicht vollständig mit Hilfe der Relationalsemantik ausdrücken lassen. Die hier gezeigte Darstellbarkeit der KRIPKE-Strukturen durch Nachbarschaftsstrukturen beweist zwar noch nicht endgültig die Unterordnung der relativistischen Semantik gegenüber der Nachbarschaftsemantik, ein vollständiger Beweis würde allerdings hier zu weit führen. Nähere Informationen dazu finden sich in [Gab75].

Literatur

[EMC$^+$01] Harmut Ehrig, Bernd Mahr, Felix Cornelius, Martin Große-Rhode, and Philip Zeitz. *Mathematisch-strukturelle Grundlagen der Informatik.* Springer Verlag, 2001.

[Gab75] Dov Gabbay. A normal logic that is complete for neighborhood frames but not for kripke frames. *Theoria*, 41:148–153, 1975.

[Geo05] Zeit – das ewige Rätsel. *GEOWISSEN*, (36):41, 2005.

[GHR94] Dov M. Gabbay, Ian Hodkinson, and Mark Reynolds. *Temporal Logic – Mathematical Foundations and Computational Aspects*, volume 1. Oxford University Press, 1994.

[Kro99] Thomas Kropf. *Introduction to Formal Hardware Verification*. Springer Verlag, 1999.

[Rau79] Wolfgang Rautenberg. *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Vieweg, 1979.