Technische Universität Berlin
Fakultät IV - Elektrotechnik und Informatik
Institut für Softwaretechnik und Theoretische Informatik
Fachgebiet Algorithmik und Komplexitätstheorie

Informatik
Bacholorarbeit

Das Stable Roommate-Problem unter Einschränkungen der Präferenzstruktur

Ugo Paavo Finnendahl
Matrikelnummer: 349978

Berlin, 20. April 2016

1. Gutachter: Prof. Dr. Rolf Niedermeier
2. Gutachter: Prof. Dr. Martin Skutella

Betreuer: Dr. Robert Bredereck
Dr. Jiehua Chen

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, 20. April 2016	
Ort, Datum	Unterschrift des Verfassers

Danksagung

Ich bin Prof. Dr. Rolf Niedermeier, Jiehua Chen und Robert Bredereck sehr dankbar für die immense Zeit, die sie für diese Arbeit zur Verfügung gestellt haben, die unglaublich schnelle Beantwortung von E-Mails selbst zu spätester Stunde, für den messerscharfen Verstand, von dem diese Arbeit und ich sehr profitieren konnten und ganz besonders auch für die empathische Unterstützung in emotional etwas kritischeren Momenten.

Außerdem möchte ich meinen Eltern und Freunden danken, die mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen.

Vielen Dank!

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Stable Roommate-Problem aus dem Fachgebiet der Computational Social Choice. Ziel des Stable Roommate-Problems ist eine stabile Aufteilung einer Gruppe von $2n$ Personen in n Paare, das sogenannte stabile Matching. Für jede der Personen existieren dabei Präferenzen über andere Personen der Gruppe. Ein stabiles Matching der Personen wird dadurch gewährleistet, dass keine zwei nicht gepaarten Personen sich gegenseitig ihren aktuellen Partnern vorziehen. Wie in der Literatur schon beobachtet, kann die sich aus den Präferenzen ergebende Präferenzstruktur durch verschiedene Kriterien, zum Beispiel Single-Peaked oder Single-Crossing, eingeschränkt sein. Das Stable Roommate betrachtet normalerweise vollständige Präferenzen, durch die jede Person jeder anderen Person zugeordnet werden kann, und lässt in den Präferenzen keine Gleichwertigkeit (Ties) zwischen Personen zu. Schränkt man die Präferenzstruktur zusätzlich mit Narzissmus und Single-Peaked ein, so lässt sich immer ein eindeutiges stabiles Matching finden, das in linearer Laufzeit konstruiert werden kann [BT86]. In dieser Bachelorarbeit wird dieses Ergebnis dahingehend erweitert, dass Narzissmus und nur eine Teileigenschaft von Single-Peaked nötig ist, um die gleichen Ergebnisse zu erzielen. Zusätzlich gilt dies auch für Narzissmus und Single-Crossing beschränkte Präferenzstrukturen. Außerdem wird festgestellt, dass in denselben Fällen immer ein stabiles Matching in quadratischer Laufzeit gefunden werden kann, wenn Ties in den Präferenzen zugelassen werden. Des Weiteren zeigt diese Arbeit, dass Narzissmus, Single-Peaked und Single-Crossing kaum Auswirkungen auf Stable Roommate haben, wenn die Präferenzen nicht vollständig sind. Im speziellen, wenn Ties zugelassen sind, ist das Problem trotz Single-Peaked- und Single-Crossing-Beschränkung NP-vollständig.

Abstract

This work is concerned with the Stable Roommate problem in Computational Social Choice. Stable Roommate attempts to divide a group of $2n$ persons into n stable pairs, the so called stable matching. Hereby, each person may have preferences over some persons in the group as potential partners. A matching is called stable if no two non-paired persons prefer each other to their assigned partners. As already observed in the literature, the preferences of a group of persons may display a certain structure, as for instance narcissistic, single-peaked or single-crossing. Stable Roommate is generally concerned with complete preferences which means that each person has preferences over all persons in the group and does not allow tied preferences between two possible partners. If the preferences of the group are additionally both narcissistic and single-peaked, then there is always possible to find a unique stable matching within linear time [BT86]. This bachelor thesis extends those result by showing that narcissism and a partial characteristic of single-peaked are sufficient to guarantee the same results. This property also holds in case of narcissism and single-crossing. Furthermore this thesis shows that allowing ties, in narcissistic and single-peaked complete preferences or in narcissistic and single-crossing complete preferences, still guarantees a stable matching and can be found in $O(n^2)$ time. Finally this thesis shows that for incomplete preferences, the preference structures single-peaked and single-crossing do not help in lower the computational complexity as it is the case for complete preferences. In particular, for incomplete preferences with ties, Stable Roommate remains NP-complete even for single-peaked and single-crossing preferences.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Möchte man Studenten Plätze in Seminaren zuordnen, Bewerber auf freie Stellen verteilen oder eine Partnervermittlung eröffnen, so muss man sich einem Zuordnungsproblem stellen. Zuordnungsprobleme, auch Matchingprobleme genannt, treten dann auf, wenn man versucht in einer Menge von Objekten Paare (Student – Seminarplatz, Bewerber – freie Stelle, etc.) zu bilden. Bei diesen Zuordnungen ist darauf zu achten, dass unter Umständen nicht jedes Objekt mit jedem anderen Objekt ein Paar bilden kann, wie es zum Beispiel bei Studenten und Seminarplätzen der Fall ist. Erstens möchte vielleicht ein Student nicht an allen Seminaren teilnehmen. Zweitens sollten auch nicht zwei Studenten einander zugeordnet werden. Dieses klassische Matchingproblem und seine Varianten sind in der Vergangenheit ausgiebig erforscht und klassifiziert worden und sind häufig in effizienter (polynomieller) Zeit lösbar [GMG86; Law01]. Gale und Shapley [GS62] präsentierten 1962 eine neue Form der Matchingprobleme, das sogenannte Stable Marriage-Problem, indem sie eine weitere Bedingung an die Zuordnungen stellten: Stabilität.

1.1 Stable Matching

Das erste Stable Matching-Problem wurde von Gale und Shapley [GS62] vorgestellt und ist das bekannte Stable Marriage-Problem. In diesem Problem werden zwei verschiedene Mengen, zum Beispiel Männer und Frauen, einander zugeordnet. Dabei besitzen alle Personen eine Präferenzliste über alle Personen des anderen Geschlechtes. Eine Zuordnung wird als instabil bezeichnet, wenn sich zwei nicht miteinander gepaarte Personen gegenseitig ihren aktuellen Partnern bevorzugen. Ist dies nicht der Fall, ist die Zuordnung stabil. Das wird klarer, wenn man sich folgendes Beispiel für eine Stable Marriage-Instanz und einem möglichen stabilen Matching anguckt:

Präferenz	Männer	Frauen	Präferenz
$\text{Anna} \prec \text{Berta} \prec \text{Clara} \prec \underline{\text{Daria}}$	: Alex	Anna :	$\text{Boris} \succ \text{Dave} \succ \underline{\text{Carl}} \succ \text{Alex}$
$\text{Anna} \prec \text{Daria} \prec \text{Berta} \prec \underline{\text{Clara}}$	: Boris	Berta :	$\text{Alex} \succ \underline{\text{Dave}} \succ \text{Boris} \succ \text{Carl}$
$\underline{\text{Anna}} \prec \text{Daria} \prec \text{Clara} \prec \text{Berta}$	: Carl	Clara :	$\underline{\text{Boris}} \succ \text{Carl} \succ \text{Alex} \succ \text{Dave}$
$\text{Daria} \prec \text{Anna} \prec \text{Clara} \prec \underline{\text{Berta}}$	: Dave	Daria :	$\text{Boris} \succ \underline{\text{Alex}} \succ \text{Dave} \succ \text{Carl}$

Dabei gibt $Z \prec A$, beziehungsweise $A \succ Z$, die Reihenfolge an, in der die Person hinter dem Doppelpunkt die Personen des anderen Geschlechts präferieren. Das heißt beispielsweise, dass Alex am liebsten Daria als Partner hätte und Daria am liebsten Boris als Partner hätte. Ein mögliches stabiles Matching ist durch Unterstreichung und blaue Verbindungslinien zwischen den Partnern gekennzeichnet. Die angegebene Lösung ist stabil, obwohl nicht jede Person mit ihrer ersten Wahl gepaart ist. Das erkennt man zum Beispiel an Berta, die lieber mit ihrer ersten Wahl Alex als mit Dave zusammen wäre, aber keine Chance bei Alex hat, da er mit Daria am zufriedensten ist.

Gale und Shapley bewiesen in derselben Arbeit, dass in jeder möglichen Eingabeinstanz mit n Männern und n Frauen immer ein stabiles Matching existiert und stellten einen Algorithmus vor, der in $\mathcal{O}(n^2)$ (quadratischer) Laufzeit eine Lösung findet.

Obwohl sich schon McVitie und Wilson [MW71] mit Stable Marriage beschäftigten und einen rekursiven Algorithmus fanden, der alle stabilen Matchings findet, wurde das Problem erst durch die Arbeit von Knuth [Knu97] bekannter. Knuth stellte Verbindungen zu anderen kombinatorischen Problemen her und beschrieb zwölf Probleme mit Bezug zu Stable Marriage. Eines dieser Probleme ist das Stable Roommate-Problem, das ursprünglich schon von Gale und Shapley [GS62] beschrieben wurde und eine Variation des Stable Marriage darstellt. Dieses Problem erhält im Unterschied zum Stable Marriage nur eine Menge von $2n$ Personen und deren Präferenzen als Eingabe, die jeweils mit allen anderen Person gepaart werden können. Die Stabilitätsbedingung bleibt dieselbe. Anwendungen können neben der namensgebenden Aufteilung auf Doppelzimmer auch die Ermittlung von Paarungen auf Schachturnieren [KLM99] oder der Austausch von Nieren zwischen zwei für sich genommen inkompatiblen Spender-Patienten-Paaren [Irv07; RSÜ05] sein. Knuth stellte zwar fest, dass mehrere stabile Matchings wie bei Stable Marriage existieren können, aber eine Stable Roommate-Instanz nicht zwangsläufig ein stabiles Matching besitzen muss, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$
\begin{array}{rc}
\text{Person} & \text{Präferenz} \\
\text{Alex}: & \text{Berta} \succ \text{Carl} \succ \text{Daria} \\
\text{Berta}: & \text{Carl} \succ \text{Alex} \succ \text{Daria} \\
\text{Carl}: & \text{Alex} \succ \text{Berta} \succ \text{Daria} \\
\text{Daria}: & \text{Alex} \succ \text{Berta} \succ \text{Carl}
\end{array}
$$

In dieser Stable Roommate-Instanz erkennt man, dass Daria von allen anderen Personen als letztes präferiert wird. Außerdem sind die drei Personen Alex, Berta und Carl jeweils die 1. Wahl, genau einer der anderen zwei Personen. Dadurch ist es egal, welche der drei Personen am Ende mit Daria ein Paar bildet, sie wird bei einem der andern zwei in der Präferenzliste an erster Position stehen, wodurch jedes Matching instabil ist.

Knuth vermutete, dass es einen effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems gibt, hielt es aber auch für möglich, dass das Problem NP-schwer ist. Knapp zehn Jahre später stellte Irving [Irv85] einen Algorithmus vor, der in $\mathcal{O}(n^2)$ zu einer gegebenen Instanz des Stable Roommate mit $2n$ Personen ermittelt, ob ein stabiles Matching möglich ist und im positiven Fall eine Lösung ausgibt. Da bei $2n$ Personen durch die Präferenzen die Eingabe $(2n)^2$ groß ist, läuft der Algorithmus in linearer Zeit in Bezug auf die Eingabegröße.

Ronn [Ron90] präsentierte in seiner Arbeit NP-vollständige Problemvarianten des Stable Matching-Problems. Er fand heraus, dass die Verallgemeinerung des Stable Roommate, welches in den Präferenzen gleichwertige Personen (im Englischen Ties) erlaubt, NP-vollständig ist. Gleichwertigkeit erweist sich als sinnvoll, wenn zum Beispiel eine Person zwei andere Personen gleich gern als Partner hätte oder wenn drei Spendernieren gleich kompatibel zu einen Patienten sind. Die Komplexität lässt sich dadurch erklären, dass man theoretisch alle Präferenzen in exponentiell viele Präferenzen ohne Ties umwandeln kann, indem man alle Ties in alle möglichen linearen Ordnungen „erweitert“ und dann den Algorithmus von Irving [Irv85] anwendet. Findet dieser ein stabiles

Matching in mindestens einem Fall, so ist dieses Matching auch für die ursprüngliche Instanz stabil.

Das Stable Roommate verlangt normalerweise, dass alle Personen mit allen anderen Personen gepaart werden können. Dies ist unter Umständen nicht erwünscht, wenn manche Zuordnungen nicht möglich sein sollen. Das verallgemeinerte Problem, das sich ergibt, wenn die Präferenzen der Personen unvollständig sein dürfen, wurde von Gusfield und Irving [GI89] näher betrachtet. Sie erweiterten den Algorithmus von Irving [Irv85] diesbezüglich, wobei die Laufzeit mit $\mathcal{O}(n^2)$ gleich blieb.

In dieser Bachelorarbeit wird Stable Roommate mit vollständigen und unvollständigen Präferenzen, jeweils in den Varianten mit Ties und ohne Ties, betrachtet. Im Zentrum steht dabei die Frage, welche Auswirkungen Einschränkungen der Präferenzstruktur auf die Komplexität der Probleme haben. Die betrachteten Einschränkungen sind bekannte Restriktionen aus der Social Choice Theory, den Politikwissenschaften und der Psychologie.

1.2 Einschränkungen der Präferenzstruktur

In vielen ökonomischen oder politischen Modellen sind die Präferenzstrukturen auf natürliche Weise eingeschränkt. Die bekanntesten formalen Einschränkungen heißen Single-Peaked und Single-Crossing. Sie haben ihren Ursprung in politischen Wahlen beziehungsweise in Abstimmungen über Steuersätze.

Die von Black [Bla48] vorgestellte Single-Peaked-Eigenschaft stellt unter anderem sicher, dass es einen Condorcet-Sieger[1] gibt und kommt häufig in politischen Wahlen vor. Präferenzen sind genau dann single-peaked, wenn es eine lineare Ordnung der Kandidaten gibt, bezüglich derer die Position der Kandidaten in der Präferenzliste jedes Wählers entweder immer steigt, immer sinkt oder zunächst steigt und danach sinkt. In Abbildung 1 ist dies anhand einer politischen Wahl visualisiert, aus der die Namensherkunft von Single-Peaked leicht ersichtlich ist. Single-Peaked-Präferenzen kommen beispielsweise vor, wenn alle Wähler ein gemeinsames Weltbild (die lineare Ordnung der Kandidaten) haben. In diesem Weltbild besitzt jeder Wähler einen idealen Kandidaten und je weiter ein anderer Kandidat von dem Ideal entfernt ist, desto weniger wird dieser bevorzugt.

Eine etwas weniger bekannte Einschränkung ist die von Robert [Rob77] vorgestellte Single-Crossing-Eigenschaft. Sie findet zum Beispiel Anwendung bei Abstimmungen über Einkommensumverteilungen [MR81] oder Koalitionsbildungen [Dem94]. Für die Single-Crossing-Eigenschaft muss es wieder eine lineare Ordnung geben, diesmal aber über die Menge der Wähler. Diese lineare Ordnung kann man für jeweils zwei Kandidaten an einer Stelle teilen, sodass alle Wähler vor der Teilung mit der Präferenz zwischen den zwei Kandidaten übereinstimmen sowie alle Wähler nach der Teilung auch übereinstimmen. Ein Beispiel kann man in der Abbildung 2 sehen. Durch Verbinden der Positionen jedes Kandidaten in den Präferenzen mit einer Linie wird der Name Single-Crossing unmittelbar ersichtlich, da sich zwei Linien maximal einmal schneiden. An dem Schnittpunkt kann man dann die besagte Teilung vornehmen.

[1] Unter Condorcet-Sieger versteht man einen Kandidaten, der von der Mehrheit gegenüber jedem anderen Kandidaten bevorzugt wird.

Wähler	Präferenz
Alex:	Linke $\succ$ SPD $\succ$ CDU $\succ$ AfD
Berta:	CDU $\succ$ AfD $\succ$ SPD $\succ$ Linke
Carl:	SPD $\succ$ CDU $\succ$ Linke $\succ$ AfD

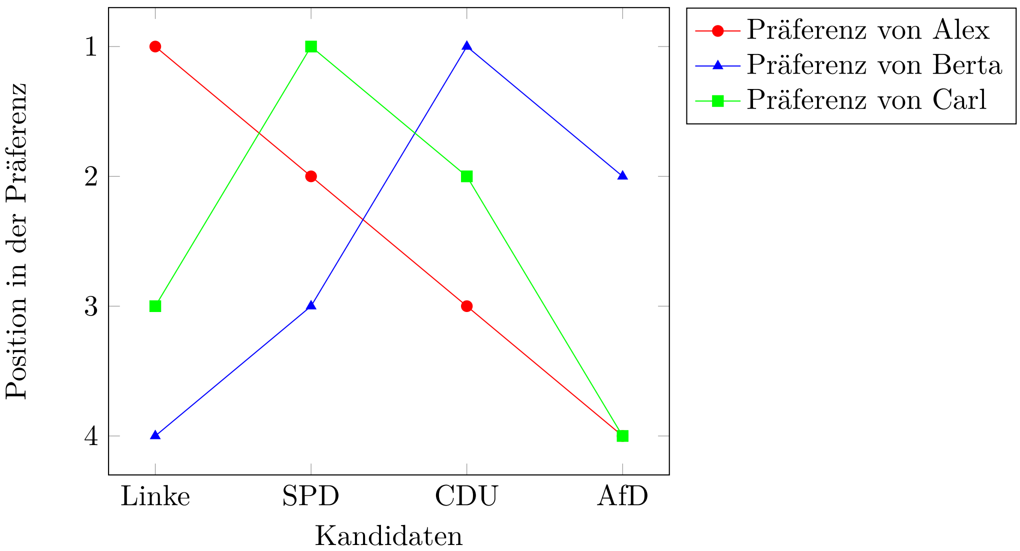


Abbildung 1: Visualisierung einer single-peaked beschränkten Präferenzstruktur.

Wähler	Präferenz
Anna:	Alex $\succ$ Berta $\succ$ Daria $\succ$ Carl
Boris:	Berta $\succ$ Alex $\succ$ Daria $\succ$ Carl
Clara:	Daria $\succ$ Berta $\succ$ Alex $\succ$ Carl
Dave:	Daria $\succ$ Berta $\succ$ Carl $\succ$ Alex

Abbildung 2: Visualisierung einer single-crossing beschränkten Präferenzstruktur.

Als letzte Einschränkung betrachtet diese Arbeit die Narzissmus-Eigenschaft, die besagt, dass jede Person sich selbst als idealen Partner präferiert. Obwohl niemand mit sich selbst gepaart werden kann, ist die von Bartholdi und Trick [BT86] vorgestellte Narzissmus-Eigenschaft sinnvoll in der Kombination mit Single-Peaked und/oder Single-Crossing. Stellt man sich zum Beispiel ein Schachturnier vor und die Spieler möchten ein Testspiel gegen jemanden spielen, der eine ähnliche Elo-Zahl[2] besitzt wie sie selbst, dann könnten sich beispielsweise die Präferenzen aus Abbildung 3 ergeben. Ordnet man

[2]Die Elo-Zahl ist eine internationale Wertungszahl, die die Spielstärke von Schach- oder Go-Spielern misst. Je größer die Wertung, desto besser spielt die Person.

Name (Elo)	Präferenz
Alex (1834):	Alex $\succ$ Berta $\succ$ Carl $\succ$ Daria $\succ$ Emil $\succ$ Fine
Berta (1663):	Berta $\succ$ Carl $\succ$ Daria $\succ$ Alex $\succ$ Emil $\succ$ Fine
Carl (1554):	Carl $\succ$ Daria $\succ$ Berta $\succ$ Emil $\succ$ Alex $\succ$ Fine
Daria (1421):	Daria $\succ$ Emil $\succ$ Carl $\succ$ Berta $\succ$ Alex $\succ$ Fine
Emil (1337):	Emil $\succ$ Fine $\succ$ Daria $\succ$ Carl $\succ$ Berta $\succ$ Alex
Fine (1205):	Fine $\succ$ Emil $\succ$ Daria $\succ$ Carl $\succ$ Berta $\succ$ Alex

Abbildung 3: Eine narzisstisch, single-peaked und single-crossing beschränkte Präferenzstruktur.

die „Wähler“ nach ihrer Elo-Wertung, so wird deutlich, dass die Präferenzstruktur bezüglich dieser linearen Ordnung die Narzissmus-, Single-Peaked- und Single-Crossing-Eigenschaft aufweist.

In dieser Arbeit werden die in Abschnitt 1.2 vorgestellten Einschränkungen und ihr Einfluss auf die in Abschnitt 1.1 vorgestellten Varianten des Stable Roommate betrachtet.

Aufbauend auf der Arbeit von Bartholdi und Trick [BT86], in der Stable Roommate mit narzisstisch und single-peaked beschränkten Präferenzstrukturen in der Variante ohne Ties und vollständigen Präferenzen betrachtet wird, wird festgestellt, dass nur eine Teileigenschaft von Single-Peaked nötig ist, um die gleichen Ergebnisse zu erzielen. Außerdem finden wir heraus, dass Stable Roommate mit Ties und unvollständige Präferenzen trotz single-peaked und single-crossing Beschränkung NP-vollständig ist.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist in Tabelle 1 dargestellt. Hierbei ist anzumerken, dass für Stable Roommate ohne Ties und mit vollständigen Präferenzen folgende Eigenschaften gelten:

- Aus Narzissmus und Single-Crossing folgt Single-Peaked (Satz 3.4 und [EFS14]).
- Aus Narzissmus und Single-Peaked folgt, dass ein eindeutiges stabiles Matching existiert (Satz 3.1 und [BT86]).

Aus zeitlichen Gründen fehlt die Betrachtung des Stable Roommate mit Ties und unvollständigen Präferenzen, unter Narzissmus und Single-Peaked-Einschränkung sowie Narzissmus und Single-Crossing-Einschränkung. Es wird vermutet, dass dieser Fall NP-Vollständigkeit aufweist.

Tabelle 1: Betrachtete Probleme und deren Komplexität.

	STABLE ROOMMATE		
Einschränkungen	vollständig ohne Ties	vollständig mit Ties	unvollständig ohne Ties
keine	$\mathcal{O}(n^2)$ [Irv85]	NP-v [Ron90]	$\mathcal{O}(n^2)$ [GI89]
Narzissmus und Single-Peaked	$\mathcal{O}(n)$ [BT86]	$\mathcal{O}(n^2)$ (Satz 3.3)	$\mathcal{O}(n^2)$ [GI89]
Narzissmus und Single-Crossing	$\mathcal{O}(n)$ (Korollar 3.4)	$\mathcal{O}(n^2)$ (Korollar 3.10)	$\mathcal{O}(n^2)$ [GI89]

	STABLE ROOMMATE
Einschränkungen	unvollständig mit Ties
Single-Peaked	NP-v (Satz 4.1)
Single-Crossing	NP-v (Satz 4.2)
Single-Peaked und Single-Crossing	NP-v (Satz 4.3)

$1: \ 1 \succ 2 \approx 3 \succ 4 \succ 5 \succ 6$

$2: \ 2 \succ 1 \succ 3 \succ 4$

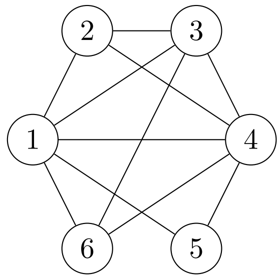
$3: \ 3 \succ 2 \succ 1 \approx 4 \approx 6$

$4: \ 4 \succ 3 \succ 2 \succ 1 \succ 5 \succ 6$

$5: \ 5 \succ 4 \approx 1$

$6: \ 6 \succ 4 \approx 3 \succ 1$

(a) Präferenzprofil



(b) Zugrundeliegender Graph

Abbildung 4: Ein Beispiel eines Präferenzprofils mit seinem *zugrundeliegenden Graphen*.

2 Notationen und Grundlegendes

Sei $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Menge von n Personen. Jedes Element i in A wird als eine *Person* mit Namen i bezeichnet. Jede Person $i \in A$ führt eine *Präferenzordnung* $\succcurlyeq_i$ über eine Teilmenge $A_i \subseteq A$, die alle Personen beinhaltet, denen i zugeordnet werden kann. Die Präferenzordnung einer Person $i \in A$ ist dabei eine schwache (totale und transitive) Ordnung $\succcurlyeq_i$ über A_i, sie erlaubt also Gleichwertigkeit (Ties) zwischen zwei Personen in A_i. Für drei Personen x, y $(x \neq y)$ und i wird $x \approx_i y$ geschrieben, wenn $(x, y) \in \succcurlyeq_i$ und $(y, x) \in \succcurlyeq_i$. Es wird $x \succ_i y$ geschrieben, wenn $(x, y) \in \succcurlyeq_i$ und $(y, x) \notin \succcurlyeq_i$. Für zwei Personen x und y bedeutet $x \succ_i y$, dass Person i die Person x der Person y vorzieht und $x \approx_i y$, wenn x und y von i als gleichwertig angesehen werden. Sei $\mathrm{Pos}_i(j)$ definiert als $\mathrm{Pos}_i(j) = 1 + |\{k \in A_i \mid k \succ_i j\}|$. Das bedeutet jede Person $j \in A_i$ steht an einer Position $(\mathrm{Pos}_i(j))$ in der Präferenzordnung von Person i.

Für zwei disjunkte Personenmengen A und B bedeutet $A \succcurlyeq_i B$, dass $a \succcurlyeq_i b$ für alle Personen a, b mit $a \in A$ und $b \in B$ gilt. Bei einelementigen Mengen werden die Mengenklammern weggelassen, sodass $a \succcurlyeq_i B$ das Gleiche bedeutet wie $\{a\} \succcurlyeq_i B$ und $A \succcurlyeq_i b$ das Gleiche bedeutet wie $A \succcurlyeq_i \{b\}$. Das Gleiche gilt analog für $\succ$ und $\approx$.

Ein *Präferenzprofil* P für eine Menge an Personen A spezifiziert die Präferenzordnungen jeder Person:

Definition 2.1 (Präferenzprofil)**.** Ein *Präferenzprofil* P ist definiert durch das Tupel $(A, \{\succcurlyeq_i \mid i \in A\})$, wobei A eine Menge von n Personen (n sei geradzahlig) und $\{\succcurlyeq_i \mid i \in A\}$ eine Multimenge der Präferenzordnungen aller Personen in A ist. Wir bezeichnen mit $\succcurlyeq_i$ die Präferenzordnung der Person i über der Teilmenge $A_i \subseteq A$. Ein Präferenzprofil, in dem $A_i = A$ für alle $i \in A$ gilt, wird *vollständiges* Präferenzprofil genannt.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für zwei Personen $i, j \in A$ gilt, dass $j \in A_i$ genau dann, wenn $i \in A_j$, da ansonsten i und j nicht miteinander gepaart werden können und somit jeweils aus der anderen Präferenzordnung entfernt werden können. Abbildung 4a zeigt ein Präferenzprofil mit sechs Personen. Man erkennt aufgrund der fehlenden Einträge, dass zum Beispiel Person 5 nur mit Person 4 oder Person 1 gepaart werden kann. Da jede Präferenzordnung eindeutig einer Person zugeordnet ist, wird auf den Index im Ordnungssymbol $\succcurlyeq$ verzichtet.

Aus den Präferenzordnungen eines Präferenzprofils lässt sich ein ungerichteter Graph konstruieren, der sichtbar macht, wer wem zugeordnet werden kann. Dieser Graph heißt *zugrundeliegender Graph* von P. Bei vollständigen Präferenzprofilen ist dieser Graph vollständig.

Definition 2.2 (Zugrundeliegender Graph)**.** Sei $P = (A, \{\succcurlyeq_i \mid i \in A\})$ ein Präferenzprofil. Der *zugrundeliegende Graph* $G = (V, E)$ ist definiert durch $V = A$ und $E \subseteq 2^V$, wobei $\{i, j\} \in E$ genau dann, wenn $j \in A_i \backslash \{i\}$.

Abbildung 4b zeigt den *zugrundeliegenden Graphen* für das Präferenzprofil in Abbildung 4a. Man erkennt, dass der Graph ungerichtet und schleifenfrei ist, obwohl jede Person sich selbst in ihrer Präferenzordnung enthält.

Ein *Matching* M teilt nun die Personen in P in disjunkte Paare ein:

Definition 2.3 (Matching)**.** Gegeben sei ein Präferenzprofil P mit dem *zugrundeliegenden Graphen* $G = (A, E)$. Eine Kantenteilmenge $M \subseteq E$ heißt (gültiges) *Matching*, wenn keine zwei unterschiedlichen Paare aus M eine gemeinsame Person haben.

Dabei ist zu beachten, dass in manchen Präferenzprofilen zwar $i \in A_i$, aber in keinem Matching i sich selbst zugeordnet werden kann, da es keine Kante von i zu i gibt.

Wenn $\{i, j\} \in M$ gilt, dann sind i und j *Partner* (beziehungsweise *gepaart*) in M. Außerdem wird M als eine einstellige Funktion verwendet, die jeder Person ihren Partner zuordnet, das heißt $M(i) = j$ genau dann, wenn $\{i, j\} \in M$. Falls für eine Person i kein $\{i, j\} \in M$ existiert, ist $M(i) = \perp$ beziehungsweise i *ungepaart*.

Ein Paar $\{i, j\} \in E\backslash M$ wird *Blocking-Pair* bezüglich M genannt, wenn i und j nicht miteinander gepaart sind, obwohl sie sich gegenseitig ihren Partnern vorziehen:

Definition 2.4 (Stabilität und Blocking-Pair)**.** Gegeben sei ein Präferenzprofil P mit dem *zugrundeliegenden Graphen* $G = (A, E)$ und ein Matching M für P. Ein *Blocking-Pair* bezüglich M ist ein Paar $\{i, j\} \in E\backslash M$, für das gilt $(i \succ_j M(j) \lor M(j) = \perp)$ und $(j \succ_i M(i) \lor M(i) = \perp)$. Ein Matching ist *stabil*, wenn es keine Blocking-Pairs enthält.

Ein Blocking-Pair ergibt sich also nur, wenn sich zwei Personen gegenseitig strikt ihren jeweiligen Partner vorziehen[3]. Oft lassen Probleme in den Präferenzordnungen keine Ties zwischen zwei Personen zu. Das bedeutet, die Ordnung $\succcurlyeq_i$ jeder Person $i \in A$ muss antisymmetrisch sein. Ist dies der Fall, so wird der Begriff Präferenzordnung durch Präferenzliste ersetzt, da $\succcurlyeq_i$ durch die geforderte Antisymmetrie eine lineare Ordnung bildet. Die Präferenzliste von i lässt sich allein durch die Verwendung von $\succ_i$ beschreiben.

Das in dieser Arbeit betrachtete Problem Stable Roommate[4] kann verallgemeinert folgendermaßen definiert werden:

[3] In der Literatur wird diese Variante auch *schwache Stabilität* genannt. Sie steht im Kontrast zu *starker Stabilität* (ein Blocking-Pair ist definiert als ein Paar $\{i, j\} \notin M$, sodass $i \succ_j M(j)$ und $j \succcurlyeq_i M(i)$) und *Superstabilität* (ein Blocking-Pair ist definiert als ein Paar $\{i, j\} \notin M$, sodass $i \succcurlyeq_j M(j)$ und $j \succcurlyeq_i M(i)$) [IM08].

[4] Einige Autoren erwähnen in dem Problemnamen, ob Ties erlaubt sind und ob die Präferenzlisten vollständig sind. Hier ist die allgemeine Variante definiert.

$$\begin{aligned}
1&: 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4\\
2&: 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1\\
3&: 2 \succ 3 \succ 1 \succ 4\\
4&: 3 \succ 2 \succ 4 \succ 1
\end{aligned}$$

Abbildung 5: Ein single-peaked beschränktes Präferenzprofil bezüglich $1 \rhd 2 \rhd 3 \rhd 4$.

STABLE ROOMMATE

Eingabe: Ein Präferenzprofil $P = (A, \{\succcurlyeq_i \mid i \in A\})$ mit n Personen.

Frage: Existiert ein stabiles Matching M?

Diese Definition schließt ungepaarte Personen in einem stabilen Matching nicht aus.

Einschränkung der Präferenzstruktur In dieser Arbeit werden spezielle Präferenzstrukturen betrachtet, die im Folgenden definiert werden:

Narzisstisch bedeutet, dass jede Person ihr eigenes Ideal darstellt und somit in ihrer Präferenzordnung an erster Position steht. Abbildung 4a zeigt so ein narzisstisches Präferenzprofil.

Definition 2.5 (Narzissmus)**.** Die Präferenzordnung der Person i ist *narzisstisch*, wenn $i \succ_i A \backslash \{i\}$ gilt. Ein Präferenzprofil ist *narzisstisch*, wenn die Präferenzordnungen aller Personen im Präferenzprofil *narzisstisch* sind.

Aufgrund der Tatsache, dass niemand mit sich selbst gepaart werden kann, ist Narzissmus allein keine Einschränkung. Durch die Kombination mit anderen Einschränkungen, wie zum Beispiel *Single-Peaked*, ergeben sich aber dennoch stärkere Restriktionen, da sich nun das „Peak“ jeder Person an der eigenen Stelle befinden muss.

Eine Präferenzstruktur ist *single-peaked* bezüglich einer linearen Ordnung aller Personen, wenn jede Person ein Ideal besitzt und alle Personen, die in der linearen Ordnung weiter von ihrem Ideal entfernt sind, weniger präferiert werden. Ein Beispiel sieht man in Abbildung 5.

Definition 2.6 (Single-Peaked)**.** Ein Präferenzprofil $P = (A, \{\succcurlyeq_i \mid i \in A\})$ ist *single-peaked*, wenn eine lineare Ordnung $\rhd$ über alle Personen in A existiert, sodass für jede Person $i \in A_i$ und je drei Personen $x, y, z \in A$ mit $x \rhd y \rhd z$, Folgendes gilt:

- Wenn $x \succ_i y$, dann $y \succcurlyeq_i z$.

Das Präferenzprofil ist dann *single-peaked* bezüglich der linearen Ordnung $\rhd$.

Bartholdi und Trick [BT86], Doignon und Falmagne [DF94] und Escoffier, Lang und Öztürk [ELÖ08] liefern polynomielle Algorithmen, die entscheiden, ob ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties single-peaked beschränkt ist. Lackner [Lac14] zeigt wiederum,

$$
\begin{aligned}
1&: \; 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \\
2&: \; 2 \succ 4 \succ 3 \succ 1 \\
3&: \; 2 \succ 4 \succ 3 \succ 1 \\
4&: \; 4 \succ 3 \succ 2 \succ 1
\end{aligned}
$$

Abbildung 6: Ein single-crossing beschränktes Präferenzprofil bezüglich $1 \rhd 2 \rhd 3 \rhd 4$.

dass es NP-vollständig zu entscheiden ist, ob ein vollständiges Präferenzprofil mit Ties single-peaked beschränkt ist.

Eine weitere Einschränkung ist die Single-Crossing-Eigenschaft. Bezüglich einer linearen Ordnung kann man für jeweils zwei Personen (als Kandidaten) an einer Stelle teilen, sodass alle Personen (als Wähler) vor der Teilung mit der Präferenz zwischen den zwei Kandidaten übereinstimmen, sowie alle Wähler nach der Teilung auch übereinstimmen. Abbildung 6 zeigt ein solches Präferenzprofil.

Definition 2.7 (Single-Crossing)**.** Ein Präferenzprofil $P = (A, \{\succ_i \mid i \in A\})$ ist *single-crossing*, wenn über alle Personen in A eine lineare Ordnung $\rhd$ existiert, wobei a die Person an erster Stelle in dieser linearen Ordnung beschreibt, sodass für je zwei Personen $i, j \in A$ mit $i \rhd j$ und für jedes Paar $\{x, y\} \subseteq A_i \cap A_j \cap A_a$ folgendes gilt:

- Wenn $x \succcurlyeq_a y$ und $y \succ_i x$, dann $y \succ_j x$.
- Wenn $y \approx_i x$ und $y \succcurlyeq_j x$, dann $x \succ_a y$.

Das Präferenzprofil ist dann *single-crossing* bezüglich der linearen Ordnung $\rhd$.

Doignon und Falmagne [DF94], Elkind, Faliszewski und Slinko [EFS12] und Bredereck, Chen und Woeginger [BCW13] liefern polynomielle Algorithmen, die entscheiden, ob ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties single-crossing beschränkt ist. Elkind u. a. [Elk+15] zeigen wiederum, dass es NP-vollständig zu entscheiden ist, ob ein vollständiges Präferenzprofil mit Ties single-crossing beschränkt ist.

Charakterisierung eingeschränkter Präferenzstrukturen Manche Eigenschaften lassen sich dadurch beschreiben, dass bestimmte Teilpräferenzen *nicht* vorkommen dürfen. Die folgenden zwei verbotenen Teilstrukturen können genutzt werden, um Single-Peaked zu charakterisieren:

Definition 2.8 (Worst-Restricted)**.** Eine *Worst-Konfiguration* ist eine Struktur, die aus drei paarweise verschiedenen Personen a, b und c sowie drei paarweise verschiedenen Personen v_1, v_2 und v_3 besteht, welche folgende Präferenzen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
v_1&: \; \{b, c\} \succ a, \\
v_2&: \; \{a, c\} \succ b, \\
v_3&: \; \{a, b\} \succ c.
\end{aligned}
$$

Ein Präferenzprofil ist *worst-restricted* genau dann, wenn es die *Worst-Konfiguration* nicht als Teilstruktur enthält.

Definition 2.9 (α-Restricted)**.** Eine *α-Konfiguration* ist eine Struktur, die aus vier paarweise verschiedenen Personen a, b, c und d sowie zwei verschiedenen Personen v_1 und v_2 besteht, welche folgende Präferenzen erfüllen:

$$\begin{aligned} v_1: &\ a \succ b \succ d \text{ und } c \succ b, \\ v_2: &\ d \succ b \succ a \text{ und } c \succ b. \end{aligned}$$

Ein Präferenzprofil ist *α-restricted* genau dann, wenn es die *α-Konfiguration* nicht als Teilstruktur enthält.

Ballester und Haeringer [BH11] zeigen, dass sich Single-Peaked in Präferenzprofilen ohne Ties durch die Kombination von Worst-Restricted und α-Restricted charakterisieren lässt.

Satz 2.1 ([BH11])**.** *Ein Präferenzprofil ohne Ties ist single-peaked genau dann, wenn es worst-restricted und α-restricted ist.*

Im Fall mit Ties muss ein Präferenzprofil notwendigerweise worst-restricted und α-restricted sein, um die Single-Peaked-Eigenschaft zu erfüllen.

Zwei weitere Restriktionen dienen zur Charakterisierung von Single-Crossing:

Definition 2.10 (γ-Restricted)**.** Eine *γ-Konfiguration* ist eine Struktur, die aus drei nicht unbedingt disjunkten Paaren von Personen $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ und $\{e, f\}$ sowie drei verschiedenen Personen v_1, v_2 und v_3 besteht, welche folgende Präferenzen erfüllen:

$$\begin{aligned} v_1: &\ b \succ a \text{ und } c \succ d \text{ und } e \succ f, \\ v_2: &\ a \succ b \text{ und } d \succ c \text{ und } e \succ f, \\ v_3: &\ a \succ b \text{ und } c \succ d \text{ und } f \succ e. \end{aligned}$$

Ein Präferenzprofil ist *γ-restricted* genau dann, wenn es die *γ-Konfiguration* nicht als Teilstruktur enthält.

Definition 2.11 (δ-Restricted)**.** Eine *δ-Konfiguration* ist eine Struktur, die aus zwei nicht unbedingt disjunkten Paaren von Personen $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ sowie vier verschiedenen Personen v_1, v_2, v_3, v_4 besteht, welche folgende Präferenzen erfüllen:

$$\begin{aligned} v_1: &\ a \succ b \text{ und } c \succ d, \\ v_2: &\ a \succ b \text{ und } d \succ c, \\ v_3: &\ b \succ a \text{ und } c \succ d, \\ v_4: &\ b \succ a \text{ und } d \succ c. \end{aligned}$$

Ein Präferenzprofil ist *δ-restricted* genau dann, wenn es die *δ-Konfiguration* nicht als Teilstruktur enthält.

Bredereck, Chen und Woeginger [BCW13] zeigen, dass sich Single-Crossing in Präferenzprofilen ohne Ties durch die Kombination von γ-Restricted und δ-Restricted charakterisieren lässt.

Satz 2.2 ([BCW13]). *Ein Präferenzprofil ohne Ties ist single-crossing genau dann, wenn es γ-restricted und δ-restricted ist.*

Im Fall mit Ties muss ein Präferenzprofil auch notwendigerweise γ-restricted und δ-restricted sein, um die Single-Crossing-Eigenschaft zu erfüllen.

Interessanterweise kann man Narzissmus auch über eine verbotene Teilstruktur definieren, da eine Präferenz narzisstisch ist, wenn es keine Person gibt, die höher priorisiert wird, als man selbst:

Beobachtung 2.12. *Ein Präferenzprofil ist narzisstisch genau dann, wenn es für zwei verschiedene Personen i und j die folgende Teilstruktur nicht enthält:*

$$j \succ_i i.$$

Verbotene Teilstrukturen können nicht durch das Entfernen von Personen aus einem Präferenzprofil entstehen. Dadurch ergibt sich:

Beobachtung 2.13. *Sei P ein Präferenzprofil und P' das Ergebnis, wenn man eine beliebige Anzahl von Personen aus P entfernt. Wenn P eine Teilstruktur nicht enthält, dann enthält P' diese Teilstruktur auch nicht.*

3 Vollständige Präferenzprofile

In diesem Kapitel werden ausschließlich vollständige Präferenzprofile betrachtet. Dabei wird auf der Arbeit von Bartholdi und Trick [BT86] aufbauend festgestellt, dass der dort implizierte Algorithmus α-Restricted nicht benötigt sowie mit den Einschränkungen, Narzissmus und Single-Crossing, auch Erfolgreich durchgeführt werden kann. Außerdem wird gezeigt, dass im allgemeineren Fall, wenn Ties in dem Präferenzprofil zugelassen sind, eine Lösung in $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit gefunden werden kann, wobei n die Anzahl der Personen beschreibt.

3.1 Präferenzprofile ohne Ties

Die folgenden zwei Abschnitte beschäftigen sich mit dem Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86]. Es wird überprüft, welche der in Abschnitt 2 vorgestellten Einschränkungen in der Kombination mit Narzissmus, den Algorithmus anwendbar machen. Außerdem wird auf die Anzahl der möglichen Präferenzprofile eingegangen, die narzisstisch und single-peaked beziehungsweise narzisstisch und single-crossing beschränkt sind.

3.1.1 Narzissmus und Single-Peaked bezogene Eigenschaften

Der folgende Abschnitt stellt den Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86] vor, welcher in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n)$ immer ein eindeutiges stabiles Matching findet, sofern das Präferenzprofil narzisstisch und single-peaked ist. Dabei steht n für die Anzahl der Personen. Außerdem wird Narzissmus jeweils mit den Teilrestriktionen von Single-Peaked (α-Restricted und Worst-Restricted) kombiniert, um zu überprüfen, ob der Algorithmus von Bartholdi und Trick trotzdem zum Erfolg führt. Zum Schluss wird die Anzahl der narzisstisch und single-peaked beschränkten Präferenzprofilen ermittelt.

Narzissmus und Single-Peaked Der Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86] lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Algorithmus 1

Eingabe: Ein Präferenzprofil P, welches narzisstisch und single-peaked ist.
Ausgabe: Ein stabiles Matching M.

```
M ← ∅
while P nicht leer do
    Finde Paar {i, j}, welches sich gegenseitig an zweiter Position präferiert.
    Füge {i, j} zu M hinzu.
    Entferne i und j aus P.
end while
```

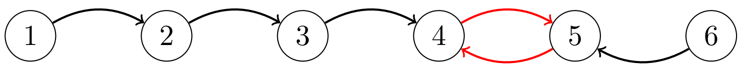
Anmerkung: Aufgrund der Narzissmus-Eigenschaft ist die erste Position, an der ein potentieller Partner stehen kann, die zweite.

Eine Beispieldurchführung zeigt wie der Algorithmus umgesetzt werden kann. Angenommen, wir hätten als Eingabe folgendes narzisstisch und single-peaked (bezüglich $1 \rhd 2 \rhd 3 \rhd 4 \rhd 5 \rhd 6$) beschränktes Präferenzprofil:

$$\begin{aligned}
1&\colon\ 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 6\\
2&\colon\ 2 \succ 3 \succ 1 \succ 4 \succ 5 \succ 6\\
3&\colon\ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 6 \succ 2 \succ 1\\
4&\colon\ 4 \succ 5 \succ 3 \succ 2 \succ 1 \succ 6\\
5&\colon\ 5 \succ 4 \succ 3 \succ 6 \succ 2 \succ 1\\
6&\colon\ 6 \succ 5 \succ 4 \succ 3 \succ 2 \succ 1
\end{aligned}$$

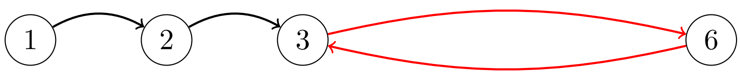
Dann initialisiert der Algorithmus zunächst M mit der leeren Menge und lässt dann jede Person auf ihre zweite Wahl zeigen. Das könnte graphisch wie folgt aus sehen:

1. Iteration: $M = \{\}$



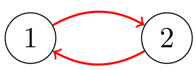
Dabei bedeutet $x \to y$, dass y an der zweiten Position der Präferenzliste von Person x steht. Da sich Person 4 und 5 gegenseitig an 2. stelle präferieren, werden sie in M gepaart und aus dem Präferenzprofil entfernt, wodurch sich folgendes Bild ergibt:

2. Iteration: $M = \{\{4, 5\}\}$



Nun zeigen Person 3 und 6 aufeinander und werden als Paar zu M hinzugefügt. Nach dem Entfernen der beiden Personen bleiben nur noch zwei Personen im Präferenzprofil übrig:

3. Iteration: $M = \{\{4, 5\}, \{3, 6\}\}$



Wodurch sich zum Schluss ein eindeutiges stabiles Matching $M = \{\{4, 5\}, \{3, 6\}, \{1, 2\}\}$ ergibt.

Um zu beweisen, dass dieser Algorithmus so immer ein stabiles Matching findet, zeigen Bartholdi und Trick zunächst, dass bei einem Präferenzprofil, welches narzisstisch und single-peaked bezüglich einer linearen Ordnung $\rhd$ ist, jede Person an der zweiten Position ihrer Präferenzliste einen Nachbarn bezüglich $\rhd$ stehen haben muss. Dabei sind die zwei Personen x und y genau dann Nachbarn, wenn $x \rhd y$ gilt und keine Person z existiert mit $x \rhd z \rhd y$. Wenn nun jede Person auf ihren bestmöglichen Partner zeigen würde, dann zeigen aufgrund des Schubfachprinzips zwei Personen auf sich gegenseitig, da es n Personen gibt und nur $n-1$ mögliche Nachbarn. Diese können problemlos aus dem Präferenzprofil entfernt werden, da aufgrund von Beobachtung 2.13, dass resultierende Präferenzprofil narzisstisch und single-peaked bleibt.

Um zu beweisen, dass dieser Algorithmus das einzige stabile Matching findet, muss noch sichergestellt werden, dass zwei Personen, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren, zusammen gepaart werden müssen, da ansonsten keine Stabilität herrscht.

Lemma 3.1. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties. Wenn es zwei Personen i und j gibt, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren, dann sind in jedem stabilen Matching diese zwei Personen Partner.*

Beweis. Wenn i nicht mit j gepaart wird, dann würden sie sich ihren aktuellen Partnern vorziehen. □

Der beschriebene Algorithmus erreicht seine Effizienz durch den Fakt, dass nach dem Finden, Paaren und Entfernen der zwei Personen nur die Präferenzen der Nachbarn dieser zwei Personen aktualisiert werden müssen. Somit ergibt sich eine lineare Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Personen. Deshalb kommen Bartholdi und Trick zu dem Schluss:

Satz 3.1 ([BT86])**.** *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties mit n Personen. Wenn P narzisstisch und single-peaked ist, dann existiert immer ein eindeutiges stabiles Matching. Dieses Matching lässt sich in $\mathcal{O}(n)$ Zeit bestimmen.*

Da sich Single-Peaked durch die Kombination von Worst-Restricted und α-Restricted ergibt, werden nun beide einzeln mit Narzissmus kombiniert, um zu überprüfen, ob eine der Eigenschaften ausreicht.

Narzissmus und α-Restricted Bei der Kombination von Narzissmus und α-Restricted kann sich ein Fall ergeben, bei dem sich keine zwei Personen an zweiter Position präferieren:

$$\begin{aligned}
1&\colon\; 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4,\\
2&\colon\; 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1,\\
3&\colon\; 3 \succ 4 \succ 1 \succ 2,\\
4&\colon\; 4 \succ 1 \succ 2 \succ 3.
\end{aligned}$$

Dieses Präferenzprofil ist narzisstisch und muss α-restricted sein, da die Präferenzlisten je zweier Personen immer single-peaked sind.

Der Algorithmus von Bartholdi und Trick ist somit nicht direkt anwendbar, obwohl sich in diesem Fall stabile Matchings finden lassen, zum Beispiel durch das Matching $M_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ oder das Matching $M_2 = \{\{2,3\},\{1,4\}\}$. Somit garantiert Narzissmus und α-Restricted keine eindeutige Lösung. Es ist trotzdem möglich, dass ein stabiles Matching immer existiert, da im Zuge dieser Arbeit kein Gegenbeispiel gefunden wurde. Es wurde durch ein Programm gezeigt, dass für $n = 4$ Personen kein Gegenbeispiel existiert.

Narzissmus und Worst-Restricted Wird Narzissmus mit Worst-Restricted kombiniert, so lässt sich der Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86] anwenden. Mit anderen Worten: Narzissmus und Worst-Restricted impliziert, dass sich immer zwei Personen gegenseitig an zweiter Position präferieren.

Satz 3.2. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties mit n Personen. Wenn P narzisstisch und worst-restricted ist, dann existiert immer ein eindeutiges stabiles Matching. Dieses Matching lässt sich in $\mathcal{O}(n)$ bestimmen.*

Um den gleichen Induktionsbeweis wie Bartholdi und Trick führen zu können, werden folgende drei Eigenschaften gezeigt:

1. Zwei Personen, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren, müssen zusammen gepaart werden, da ansonsten keine Stabilität herrscht.

2. Nach Entfernen dieser zwei Personen, ist das Präferenzprofil immer noch narzisstisch und worst-restricted.

3. In einem narzisstisch und worst-restricted beschränkten Präferenzprofil existiert mindestens ein Paar, das sich gegenseitig an zweiter Position präferiert.

Der Beweis zu Eigenschaft 1 kann von Bartholdi und Trick [BT86] übernommen werden und ist in Lemma 3.1 aufgeführt.

Aus Beobachtung 2.13 folgt direkt Eigenschaft 2, da sich Narzissmus und Worst-Restricted über verbotene Teilstrukturen charakterisieren lassen.

Um Eigenschaft 3 zu beweisen, betrachten wir zunächst die letzten Positionen der Präferenzlisten. Es wird festgestellt, dass es genau zwei verschiedene Personen geben muss, die jeweils in mindestens einer Präferenzliste an letzter Position stehen, wenn das Präferenzprofil narzisstisch und worst-restricted ist.

Beobachtung 3.2. *Sei P ein narzisstisch und worst-restricted beschränktes, vollständiges Präferenzprofil ohne Ties. Die Anzahl der Personen, die jeweils in mindestens einer Präferenzliste von P an letzter Position stehen, ist gleich zwei.*

Beweis. Angenommen es gäbe nur eine Person a, die immer an letzter Position steht. Dann gilt für die Präferenzliste von a, dass sie sich selbst an letzter Position präferiert. Dies ist ein Widerspruch zu Narzissmus.

Angenommen es gäbe drei oder mehr Personen, die jeweils in mindestens einer Präferenzliste von P an letzter Position stehen. Dann enthält das Präferenzprofil eine Worst-Konfiguration.

Daraus folgt, dass die Anzahl der Personen, die in mindestens einer Präferenzliste von P an letzter Position stehen, gleich zwei ist. □

Nun kann Eigenschaft 3 bewiesen werden.

Lemma 3.3. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties und mit mindestens drei Personen. Wenn P narzisstisch und worst-restricted ist, dann existieren zwei verschiedene Personen, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren.*

Beweis. Angenommen es gäbe keine zwei verschiedene Personen, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren, dann existiert mindestens ein Zyklus $c_1, \ldots, c_{n'}$ mit $n' > 3$ für den gilt, dass für jede Person $i = 1, \ldots, n' - 1$ in der Präferenzliste von c_i an zweiter Position c_{i+1} steht, sowie in der Präferenzliste von $c_{n'}$ an zweiter Position c_1 steht.

Sei P' das Präferenzprofil das sich ergibt, wenn alle Personen bis auf $c_1, \ldots, c_{n'}$ aus P entfernt werden. Aus Beobachtung 2.13 folgt, dass P' immer noch narzisstisch und worst-restricted ist. Außerdem gilt aufgrund der Definition des Zyklus, dass für jede Person $c \in \{c_1, \ldots, c_n'\}$ gilt, dass die Person an der zweiten Position in der Präferenzliste von c in P' die gleiche Person an der zweiten Position in der Präferenzliste von c in P ist.

Aus Beobachtung 3.2 geht hervor, dass es exakt zwei Personen c_l und c_o gibt, sodass gilt: Für alle Personen in P' ist entweder c_l oder c_o an letzter Position in der Präferenzliste jeder Person. Aufgrund von Narzissmus muss c_l in der Präferenzliste von c_o an letzter Position stehen und c_o in der Präferenzliste von c_l an letzter Position stehen. Dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_l \neq c_1$ und $c_l \neq c_{n'}$.

Dann muss c_o verschieden von c_{l+1} sein, da ansonsten c_o in der Präferenzliste von c_l an zweiter Position (aufgrund des Zyklus) und an letzter Position (aufgrund Beobachtung 3.2) stehen müsste. Dies ist ein Widerspruch, da $n \geq 3$ gilt. Analog lässt sich zeigen, dass $c_{l-1} \neq c_o$. Das bedeutet c_l, c_{l-1}, c_{l+1} und c_o sind paarweise verschieden.

Unter diesen Bedingungen enthält das Präferenzprofil eine Worst-Konfiguration: In der Präferenzliste von c_l gilt aufgrund des Zyklus:

$$\{c_l, c_{l+1}\} \succ_{c_l} c_{l-1}.$$

In der Präferenzliste von c_{l-1} gilt aufgrund des Zyklus:

$$\{c_{l-1}, c_l\} \succ_{c_{l-1}} c_{l+1}.$$

Außerdem gilt in der Präferenzliste von c_o:

$$\{c_{l-1}, c_{l+1}\} \succ_{c_o} c_l,$$

da c_l, wie oben erwähnt, an letzter Position stehen muss.

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass das Präferenzprofil worst-restricted ist. □

Lemma 3.1, Beobachtung 2.13 und Lemma 3.3 beweisen, dass der Algorithmus von Bartholdi und Trick auch auf einem Präferenzprofil funktioniert, welches nur narzisstisch und worst-restricted ist. Da dieser Algorithmus in linearer Zeit terminiert, ist Satz 3.2 bewiesen.

Anzahl der Präferenzprofile Im Folgenden wird die Anzahl der Präferenzprofile, die narzisstisch und single-peaked sind, ermittelt. Sei $(1 \rhd 2 \rhd \ldots \rhd n)$ die lineare Ordnung, bezüglich derer ein narzisstisches Präferenzprofil mit n Personen single-peaked ist. Aufgrund von Narzissmus muss die Präferenzliste von 1 eindeutig sein:

$$1\colon\ 1 \succ 2 \succ \ldots \succ n$$

Für 2 ergeben sich $n-1$ mögliche Präferenzlisten, da 1 an jeder, bis auf der ersten, Position stehen kann. Für 3 ergeben sich $\binom{n-1}{2}$ mögliche Präferenzlisten, da die Positionen von 1 und 2 ab der zweiten Position beliebig gewählt werden können, solange $2 \succ_3 1$ gilt. Für k mit $1 \leq k \leq n$ ergeben sich $\binom{n-1}{k}$ mögliche Präferenzlisten, da die Positionen der Personen i mit $i < k$ ab der zweiten Position frei gewählt werden können, solange $l \succ_k j$ mit $l > j$ für alle $l, j < k$ gilt.

Damit kann man die Funktion $\#_{\text{nz+sp}}(n)$, die in Abhängigkeit von der Anzahl der Personen die Anzahl der möglichen narzisstisch und single-peaked beschränkten Präferenzprofile angibt, wie folgt definieren:

$$\#_{\text{nz+sp}}(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

Da sich $\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ sehr grob mit $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n$ abschätzen lässt und die Approximation von Spencer [Spe14] besagt, dass für große n der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ mit

$$\frac{2^n}{\sqrt{\frac{1}{2}n\pi}} e^{-\frac{(\frac{n}{2}-k)^2}{\frac{n}{2}}} [1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})]$$

approximiert werden kann, liegt $\#_{\text{nz+sp}}(n)$ in $2^{\mathcal{O}(n^2)}$, da $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ eingesetzt $\frac{2^n}{\sqrt{\frac{1}{2}n\pi}}[1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})]$ ergibt.

3.1.2 Narzissmus und Single-Crossing bezogene Eigenschaften

Analog zu Abschnitt 3.1.1 beschäftigt sich dieser Abschnitt zunächst mit narzisstisch und single-crossing beschränkten vollständigen Präferenzprofilen ohne Ties. Danach wird Narzissmus mit den Teilrestriktionen von Single-Crossing kombiniert. Zum Schluss wird versucht die Anzahl der narzisstisch und single-crossing beschränkten Präferenzprofile zu ermittelt.

Narzissmus und Single-Crossing Ist das Präferenzprofil vollständig, so folgt aus Narzissmus und der Single-Crossing-Eigenschaft die Single-Peaked-Eigenschaft. Dies beobachteten schon Elkind, Faliszewski und Skowron [EFS14] mit Hilfe der Arbeit von Barberà und Moreno [BM11]. Diese Aussage gilt auch, wenn Ties zugelassen sind, wie später in Abschnitt 3.2.2 bewiesen wird.

Somit lässt sich der Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86] auch auf ein narzisstisch und single-crossing beschränktes Präferenzprofil anwenden.

Korollar 3.4. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil ohne Ties mit n Personen. Wenn P narzisstisch und single-crossing ist, dann existiert immer ein eindeutiges stabiles Matching. Dieses Matching lässt sich in $\mathcal{O}(n)$ Zeit bestimmen.*

Ist das Präferenzprofil narzisstisch und single-peaked, so folgt jedoch nicht, dass das Präferenzprofil single-crossing ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$
\begin{aligned}
1 &: \ 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4, \\
2 &: \ 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1, \\
3 &: \ 3 \succ 2 \succ 1 \succ 4, \\
4 &: \ 4 \succ 3 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}
$$

Dieses Präferenzprofil ist narzisstisch und single-peaked bezüglich $1 \rhd 2 \rhd 3 \rhd 4$, enthält aber die δ-Konfiguration und ist somit nicht single-crossing:

$$
\begin{aligned}
1 &: \ 1 \succ 4 \text{ und } 2 \succ 3, \\
3 &: \ 1 \succ 4 \text{ und } 3 \succ 2, \\
2 &: \ 4 \succ 1 \text{ und } 2 \succ 3, \\
4 &: \ 4 \succ 1 \text{ und } 3 \succ 2.
\end{aligned}
$$

Also ergibt sich folgende Beobachtung:

Beobachtung 3.5. *Die Menge aller narzisstisch und single-crossing beschränkten, vollständigen Präferenzprofile ohne Ties ist eine echte Teilmenge der Menge aller narzisstischen und single-peaked beschränkten, vollständigen Präferenzprofile ohne Ties.*

Da sich auch Single-Crossing durch die Kombination zweier weiterer Einschränkungen beschreiben lässt, wird, wie schon in Abschnitt 3.1.1, Narzissmus zunächst mit γ-Restricted und dann mit δ-Restricted kombiniert einzeln betrachtet.

Narzissmus und γ-Restricted Bei der Kombination von Narzissmus und γ-Restricted ergibt sich ein ähnlicher Fall, wie bei der Kombination von Narzissmus und α-Restricted. Der Algorithmus von Bartholdi und Trick ist nicht direkt anwendbar, da nicht garantiert werden kann, dass sich immer zwei Personen gegenseitig an zweiter Position präferieren, wie das folgende narzisstisch und γ-restricted beschränkte Präferenzprofil zeigt:

$$
\begin{aligned}
1 &: \ 1 \succ 2 \succ 4 \succ 3, \\
2 &: \ 2 \succ 3 \succ 1 \succ 4, \\
3 &: \ 3 \succ 4 \succ 2 \succ 1, \\
4 &: \ 4 \succ 1 \succ 3 \succ 2.
\end{aligned}
$$

Dieses Präferenzprofil ist narzisstisch und muss γ-restricted sein, da es insgesamt nur zwei verschiedene Typen von Gruppen von Meinungen bezüglich der einzelnen Kandidatenpaare (Personenpaare) gibt: Bezüglich der relativen Ordnung der Kandidatenpaare $\{1{,}4\}$, $\{2{,}3\}$, und $\{2{,}4\}$ sind die Wähler (Personen) 1 und 2 der gleichen Meinung und Wähler 3 und 4 genau der entgegengesetzten Meinung, während bezüglich der relativen Ordnung der restlichen Kandidatenpaare die Wähler 1 und 4 der gleichen Meinung und die Wähler 2 und 3 genau der entgegengesetzten Meinung sind. Für eine γ-Konfiguration benötigt man jedoch mindestens drei verschiedene Typen von Gruppen von Meinungen bezüglich drei unterschiedlicher Kandidatenpaare.

Es lassen sich mehrere stabile Matchings finden, zum Beispiel $M_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ und $M_2 = \{\{2,3\},\{1,4\}\}$. Somit garantiert Narzissmus und γ-Restricted keine eindeutige Lösung. Dennoch könnte es sein, dass ein stabiles Matching immer existiert, da noch kein Gegenbeispiel gefunden wurde. Es wurde durch ein Programm gezeigt, dass für $n = 4$ Personen kein Gegenbeispiel existiert.

Narzissmus und δ-Restricted Im Gegensatz zu Narzissmus und γ-Restricted lässt sich für die Kombination von Narzissmus und δ-Restricted leicht ein Beispiel konstruieren, das kein stabiles Matching besitzt, obwohl es diese Restriktionen erfüllt:

$$\begin{aligned} 1&: \ 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4, \\ 2&: \ 2 \succ 3 \succ 1 \succ 4, \\ 3&: \ 3 \succ 1 \succ 2 \succ 4, \\ 4&: \ 4 \succ 3 \succ 1 \succ 2. \end{aligned}$$

Dieses Präferenzprofil ist narzisstisch und muss δ-restricted sein, da sich immer drei Personen bezüglich der relativen Ordnung zweier Personen einig sind. Die einzige Ausnahme stellen die relativen Ordnungen von dem Kandidatenpaar $\{2,3\}$ dar. Da aber zwei solcher unterschiedlichen Paare gefunden werden müssen, ist das Präferenzprofil δ-restricted.

Dieses Präferenzprofil besitzt kein stabiles Matching, denn egal mit wem die Person 4 gepaart wird, ihr Partner und einer der restlichen zwei führen zur Instabilität. Dennoch könnte es sein, dass ein stabiles Matching eindeutig ist, falls es existiert, da noch kein Gegenbeispiel gefunden wurde. Es wurde durch ein Programm gezeigt, dass für $n = 4$ Personen kein Gegenbeispiel existiert.

Anzahl der Präferenzprofile Im Folgenden wird die Anzahl der Präferenzprofile, die narzisstisch und single-crossing sind, betrachtet. Aus Satz 3.4 folgt, dass die Menge aller Präferenzprofile, die narzisstisch und single-peaked sind, eine echte Obermenge von der gesuchten Menge ist. Somit muss laut dem Ergebnis in Abschnitt 3.1.1 die Funktion $\#_{\text{nz+sc}}(n) < \#_{\text{nz+sp}}(n)$ sein.

Betrachtet man nun das Eingangsbeispiel aus Abbildung 3, so erkennt man, dass die Position jeder Person in den Präferenzlisten, wenn man sie in der Ordnung sortiert, in der sie single-crossing und single-peaked sind, zunächst monoton kleiner wird, bis man bei seiner eigenen Präferenzliste an erster Position steht und dann wieder monoton größer wird. Daraus ergibt sich folgende Beobachtung:

Beobachtung 3.6. *Sei P ein narzisstisches, vollständiges Präferenzprofil ohne Ties. Wenn P single-crossing bezüglich der linearen Ordnung $\rhd$ ist, dann gilt für drei verschiedene Personen i, j und k:*

- *Wenn $k \rhd i \rhd j$, dann gilt $\mathrm{Pos}_i(k) \leq \mathrm{Pos}_j(k)$.*

Beweis. Angenommen es gäbe drei Personen k, i und j mit $k \rhd i \rhd j$, für die gilt $\mathrm{Pos}_i(k) > \mathrm{Pos}_j(k)$. Dann stehen in der Präferenzliste von i mehr Personen vor k als in der Präferenzliste von j. Draus folgt, dass ein Kandidat l existieren muss, der in der Präferenzliste von i vor k steht und in der Präferenzliste von j hinter k steht:

$$\mathrm{Pos}_i(l) < \mathrm{Pos}_i(k) \wedge \mathrm{Pos}_j(k) < \mathrm{Pos}_j(l).$$

Aus Narzissmus folgt, dass $\mathrm{Pos}_k(k) < \mathrm{Pos}_k(l)$ und da $k \rhd i \rhd j$ gilt, ergeben sich zwei „crossings" durch $\{l, k\}$, womit ein Widerspruch zur Single-Crossing-Eigenschaft gegeben ist. □

Mit diesen Erkenntnissen wurde eine Funktion programmiert, die in Abhängigkeit von n alle Präferenzprofile mit n Personen ausgibt, welche die Single-Peaked-Eigenschaft und die Eigenschaft aus Beobachtung 3.6 erfüllen. Danach wurde überprüft, ob die so erzeugten Präferenzprofile single-crossing beschränkt sind. Für die Fälle $2 \leq n \leq 8$ wurde so rechnerisch gezeigt, dass alle $2^{\binom{n-1}{2}}$ ausgegebenen Profile die Single-Crossing-Eigenschaft erfüllen. Dadurch ergibt sich die Vermutung, dass grundsätzlich $\#_{\mathrm{nz+sc}}(n) = 2^{\binom{n-1}{2}}$ gilt.

3.2 Präferenzprofile mit Ties

Im folgenden Abschnitt lassen wir Ties in vollständigen Präferenzprofilen zu und kommen zu dem Schluss, dass sich in diesem Fall immer ein stabiles Matching finden lässt, der Aufwand dafür $\mathcal{O}(n^2)$ beträgt und die gefundene Lösung nicht zwangsläufig eindeutig ist.

3.2.1 Narzissmus und Single-Peaked

Durch die nun erlaubten Ties können sich gleiche Präferenzen bezüglich zweier Personen ergeben. Stellt man sich den ersten Schritt des Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86] wieder so vor, dass alle Personen auf ihre zweite Wahl zeigen, so können unter Umständen Personen auf mehrere Personen zeigen. Im Folgenden wird gezeigt, dass zwei Personen, die gegenseitig aufeinander zeigen, gepaart werden können. Somit gibt der Algorithmus von Bartholdi und Trick in abgewandelter Form in $\mathcal{O}(n^2)$ garantiert eine Lösung aus. Diese muss aber nicht zwangsläufig eindeutig sein.

Dazu wird zunächst gezeigt, dass zwei Personen, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren und in einem Matching gepaart werden, in keinem Blocking-Pair vorkommen können:

Lemma 3.7. *Sei $P = (A, \{\succsim_i \mid i \in A\})$ ein narzisstisches, vollständiges Präferenzprofil. Wenn es zwei Personen $i, j \in A$ gibt, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren, dann gibt es in allen Matchings für P, in denen i und j gepaart sind, kein Blocking-Pair B mit $i \in B$ oder $j \in B$.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein Blocking-Pair $\{i, k\}$ mit $k \in A$. Dann müsste $k \succ_i j$ gelten, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass j an der zweiten Position von i steht. □

Das bedeutet, wenn ein Präferenzprofil ein stabiles Matching besitzt, können zwei Personen hinzugefügt werden, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren und das resultierende Präferenzprofil besitzt immer noch ein stabiles Matching.

Beobachtung 3.8. *Sei $P = (A, \{\succcurlyeq_i \mid i \in A\})$ ein narzisstisches, vollständiges Präferenzprofil. Wenn es ein stabiles Matching M für P gibt, dann besitzt das Präferenzprofil $P' = (A', \{\succcurlyeq_i \mid i \in A'\})$ auch ein stabiles Matching. Wobei $A' = A \cup \{a, b\}$ mit $a \neq b$ gilt und die Präferenzordnungen $\succcurlyeq_a$ und $\succcurlyeq_b$ beliebig sein dürfen, solange $\mathrm{Pos}_b(a) = \mathrm{Pos}_a(b) = 2$ gilt.*

Beweis. Aus Lemma 3.7 folgt, dass das Matching $M' = M \cup \{\{i, j\}\}$ für P' stabil sein muss. □

Nun kann die Ausgangsaussage bewiesen werden:

Satz 3.3. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil mit Ties und n Personen. Wenn P narzisstisch und single-peaked ist, dann existiert immer ein stabiles Matching.*

Beweis. Die Aussage ist für $n = 2$ wahr. Angenommen sie ist außerdem für $2(k-1)$ Personen wahr. Sei $P = (A, \{\succcurlyeq_i \mid i \in A\})$ ein narzisstisches Präferenzprofil mit $|A| = 2k$ und $\rhd$ die lineare Ordnung, bezüglich der P single-peaked ist.

Durch Narzissmus und der Single-Peaked-Eigenschaft muss an der zweiten Position jeder Person einer ihrer zwei Nachbarn in $\rhd$ stehen. Konstruiert man nun einen gerichteten Graphen $G = (A, E)$, wobei $(i, j) \in E$ genau dann, wenn $\mathrm{Pos}_i(j) = 2$, dann existieren aufgrund des Schubladenprinzips und des Faktes, dass es $n - 1$ Nachbarschaften gibt, aber mindestens n Personen, die auf mindestens einen Nachbarn zeigen, zwei Personen a, b, die sich gegenseitig an zweiter Position präferieren ($(a, b) \in E \wedge (b, a) \in E$). Diese zwei Personen können aus dem Präferenzprofil entfernt werden, wodurch sich ein Präferenzprofil mit $2(k-1)$ Personen ergibt. Aus Beobachtung 3.8 und der Induktionsvoraussetzung folgt, dass es ein stabiles Matching gibt, in dem die Personen (a, b) gepaart sind. □

Aktualisiert man den Graphen G nach dem Entfernen zweier Personen, so ergibt sich implizit ein Algorithmus, mit dem man ein stabiles Matching findet. Obwohl man nach dem Entfernen zweier Personen nur ihre Nachbarn aktualisieren muss, kann die Konstruktion von G im schlimmsten Fall n^2 Schritte in Anspruch nehmen, wenn zum Beispiel die Präferenzen aller Personen nur aus Ties bestehen. In diesem Fall ergeben sich auch exponentiell viele Lösungen, da jeder mit jedem gepaart werden kann. Dadurch erübrigt sich die Frage nach einem effizienten Algorithmus, der alle Lösungen ausgibt. Möchte man dennoch an dieser Stelle weiter forschen, so kann zum Beispiel die Anzahl der Ties parametrisiert werden oder nach einer kompakten Repräsentation aller stabilen Matchings gesucht werden.

3.2.2 Narzissmus und Single-Crossing

Wie in Abschnitt 3.1.2 erwähnt, führt in vollständigen Präferenzprofilen ohne Ties die Kombination von Narzissmus und Single-Crossing zu Single-Peaked. Dieser Abschnitt zeigt, dass dies auch der Fall bleibt, wenn Ties zugelassen sind.

Satz 3.4. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil mit Ties. Wenn P narzisstisch und single-crossing ist, dann ist P auch single-peaked.*

Beweis. Aus der Definition der Single-Crossing-Eigenschaft geht hervor, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine lineare Ordnung $1 \rhd 2 \rhd \ldots \rhd n$ über alle Personen in P existiert, bezüglich der P single-crossing ist. Da P zusätzlich narzisstisch ist, gilt $i \succ_i A \backslash \{i\}$ für alle Personen $i \in A$. Insbesondere gilt das für benachbarte Personen in $\rhd$:

$$\begin{aligned} i\colon \quad & i \succ (i+1), \\ (i+1)\colon \quad & i+1 \succ i, \end{aligned}$$

sofern $(i+1) \in A$.

Also findet das „crossing“ von $\{i,(i+1)\}$ in der linearen Ordnung $\rhd$ zwischen der i-ten und der $(i+1)$-ten Stelle statt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} i \succ_k (i+1) \; & \text{für alle } k < (i+1) \text{ und} \\ (i+1) \succ_k i \quad\;\; & \text{für alle } k > i \end{aligned}$$

Bezieht man jetzt alle Personen mit ein, so ergibt sich für jede Präferenzordnung einer Person $j \in A$:

$$\begin{aligned} j\colon \; & j \succ j-1 \succ j-2 \succ \cdots \succ 1 \text{ und} \\ j\colon \; & j \succ j+1 \succ j+2 \succ \cdots \succ n \end{aligned}$$

Somit ist das Präferenzprofil P auch single-peaked unter der linearen Ordnung $1 \rhd 2 \rhd \ldots \rhd n$. $\square$

Bemerkenswert ist, dass die Funktionen $\mathrm{Pos}_i(x)$ jeder Person i in P trotz der möglichen Ties zunächst streng monoton wächst bis zur Person i und dann streng monoton fällt, wenn man die Eingabe bezüglich der linearen Ordnung $\rhd$ sortiert.

Das liegt an der hier verwendeten Definition 2.5 von Narzissmus, welches Narzissmus als strikte Bevorzugung von sich selbst gegenüber allen anderen definiert. Man könnte *schwachen Narzissmus* definieren, indem für jede Person i nur gelten muss, dass $Pos_i(i) = 1$:

Definition 3.9. Die Präferenzordnung der Person i ist *schwach narzisstisch*, wenn $i \succcurlyeq_i A \backslash \{i\}$ gilt. Ein Präferenzprofil ist *schwach narzisstisch* wenn die Präferenzordnungen aller Personen im Präferenzprofil *schwach narzisstisch* sind.

Die Aussage, aus Narzissmus und Single-Crossing folgt Single-Peaked, bleibt aber gültig, da der Beweis genauso geführt werden kann, wenn man für jede Person $x \in \{i,(i+1),j,k\}$ im Beweis die Ordnungen $\succ_x$, durch $\succcurlyeq_x$ ersetzt. Zusammen mit dem Ergebnis von Elkind, Faliszewski und Skowron [EFS14] ergibt sich also für vollständiges Präferenzprofile mit Ties und ohne Ties:

Korollar 3.10. *Sei P ein vollständiges Präferenzprofil. Wenn P schwach narzisstisch und single-crossing oder narzisstisch und single-crossing ist, dann existiert immer ein stabiles Matching.*

Somit berechnet der in Abschnitt 3.2.1 implizierte Algorithmus auch bei (schwach) narzisstisch und single-crossing beschränkten Präferenzprofilen mit Ties in $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit garantiert ein stabiles Matching.

4 Unvollständige Präferenzprofile

Aufgrund von unvollständigen Präferenzen oder Fällen, in denen eine Paarung zwischen gewissen Personen nicht erlaubt ist, existieren in der Realität häufig unvollständige Präferenzprofile. Dieser Abschnitt widmet sich deshalb dem allgemeineren Fall, der nicht voraussetzt, dass in einem Präferenzprofil alle Personen miteinander gepaart werden können.

4.1 Präferenzprofile ohne Ties

Bartholdi und Trick [BT86] bewiesen, dass ein vollständiges Präferenzprofil, welches narzisstisch und single-peaked ist, immer ein eindeutiges stabiles Matching besitzt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass dies nicht für unvollständige Präferenzprofile gilt. Zunächst wird jedoch gezeigt, dass bei unvollständigen Präferenzprofilen der Satz von Elkind, Faliszewski und Skowron [EFS14], dass aus Narzissmus und der Single-Crossing-Eigenschaft die Single-Peaked-Eigenschaft folgt, nicht mehr gültig ist. Dies wird anhand eines Gegenbeispiels gezeigt:

$$\begin{aligned}
1&:\ 1 \succ 5 \succ 6,\\
2&:\ 2 \succ 5 \succ 6,\\
3&:\ 3 \succ 5 \succ 6,\\
4&:\ 4 \succ 5 \succ 6,\\
5&:\ 5 \succ 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4,\\
6&:\ 6 \succ 4 \succ 2 \succ 3 \succ 1.
\end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, dass das Präferenzprofil narzisstisch und single-crossing bezüglich $(1 \rhd 2 \rhd 3 \rhd 4 \rhd 5 \rhd 6)$ ist, aber durch die α-Konfiguration, die sich durch die „Wähler“ $5, 6$ sowie den „Kandidaten“ $1, 2, 3, 4$ bildet, kann das Profil nicht single-peaked sein.

Nun wird gezeigt, dass ein unvollständiges Präferenzprofil, welches narzisstisch und single-peaked ist, nicht immer ein eindeutiges stabiles Matching besitzt. Zwar verallgemeinern Bartholdi und Trick [BT86] ihre Ergebnisse, indem sie einen Algorithmus demonstrieren, der bei n Personen in $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit auch auf unvollständigen Präferenzprofilen ein eindeutiges stabiles Matching findet. Dennoch erwähnen sie nicht, dass die ursprünglichen Einschränkungen nicht mehr ausreichen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned}
1&:\ 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4,\\
2&:\ 2 \succ 4 \succ 1,\\
3&:\ 3 \succ 1 \succ 4,\\
4&:\ 4 \succ 3 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel ist narzisstisch und bezüglich der linearen Ordnung $1 \rhd 2 \rhd 3 \rhd 4$ single-peaked. Da aber keine zwei Personen sich gegenseitig an zweiter Stelle präferieren, kann der Algorithmus kein Paar finden, das gepaart werden muss. In diesem Fall existieren zwei stabile Matchings, nämlich $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ und $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

Außerdem gibt es unter Umständen keine Lösung, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl} 1: & 1 \succ 4 \succ 3 & 6: & 6 \succ 9 \succ 8 \\ 2: & 2 \succ 5 \succ 4 & 7: & 7 \succ 10 \succ 9 \\ 3: & 3 \succ 1 \succ 5 & 8: & 8 \succ 6 \succ 10 \\ 4: & 4 \succ 2 \succ 1 & 9: & 9 \succ 7 \succ 6 \\ 5: & 5 \succ 3 \succ 2 & 10: & 10 \succ 8 \succ 7 \end{array}$$

Dieses Beispiel ist auch narzisstisch. Es muss single-peaked sein, da keine zwei Personen Präferenzen bezüglich drei Personen teilen und somit weder eine α-Konfiguration noch eine Worst-Konfiguration vorkommen kann.

Es ist erkennbar, dass das Präferenzprofil aus zwei Gruppen besteht (Personen 1-5 und 6-10), die nur untereinander gepaart werden können. Aufgrund der zyklischen Präferenzen kann hier kein stabiles Matching gefunden werden. Egal, wie vier Personen in der ersten Gruppe gepaart werden, die Person, die ungepaart bleibt, bildet ein Blocking-Pair mit der Person an ihrer 3. Position.

Das bedeutet, dass die Einschränkungen, die nötig sind, damit die allgemeine Version des Algorithmus von Bartholdi und Trick anwendbar ist, noch ungeklärt sind.

Da Irving seinen Algorithmus [Irv85] auf unvollständige Präferenzprofile ohne Ties erweitert [GI89], ist das Stable Roommate-Problem mit unvollständigen Präferenzprofilen ohne Ties in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$ lösbar und es scheint so, als ob Narzissmus und Single-Peaked keine gravierenden Auswirkungen auf die Lösungsfindung haben.

4.2 Präferenzprofile mit Ties

In diesem Abschnitt wird die allgemeinste Stable Roommate Variante dieser Arbeit betrachtet: Wir erlauben unvollständige Präferenzprofile und Ties. Im Folgenden wird gezeigt, dass Stable Roommate NP-vollständig ist, selbst wenn die Eingabe single-crossing und/oder single-peaked beschränkt ist. Ronn [Ron90] zeigt, dass Stable Roommate mit Ties selbst mit vollständigen Präferenzprofilen NP-vollständig ist, seine Reduktion von 3-SAT erfüllt aber nicht die single-peaked-Eigenschaft, weshalb hier eine neue Reduktion konstruiert wird.

4.2.1 Single-Peaked

Um zu zeigen, dass Stable Roommate NP-vollständig ist, selbst wenn die Eingabe single-peaked beschränkt ist, wird das Problem Vertex Cover auf Stable Roommate reduziert und gezeigt, dass die in der Reduktion konstruierte Stable Roommate-Instanz single-peaked ist. Beginnen wir mit Einordnung von Stable Roommate in NP:

Beobachtung 4.1. *Das* Stable Roommate *ist in NP.*

Beweis. Stable Roommate ist in NP, da ein nichtdeterministischer Algorithmus eine polynomiell auf die Größe der Eingabe bezogene Lösung raten könnte und diese dann in Polynomialzeit auf Konsistenz und Stabilität prüft. □

Zunächst formulieren wir folgendes Lemma:

Lemma 4.2. *Wenn ein Präferenzprofil P drei paarweise verschiedenen Personen a, b und c und einer Menge an Personen U mit folgenden Präferenzen enthält:*

$$\begin{aligned}
a\colon\ & U \succ b \succ c \succ \mathrm{REST}_a,\\
b\colon\ & c \succ a \succ \mathrm{REST}_b,\\
c\colon\ & a \succ b \succ \mathrm{REST}_c,
\end{aligned}$$

wobei REST_i *die Menge aller restlichen Personen in A_i bezeichnet, dann muss in jedem stabilen Matching M für P die Person a mit einer Person $u \in U$ und b mit c gepaart sein.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein stabiles Matching M für P, in dem a nicht mit einer Person in U gepaart ist. Dann gibt es 3 Möglichkeiten, entweder $M(a) = b$, dann wäre $\{b, c\}$ ein Blocking-Pair; oder $M(a) = c$, dann wäre $\{a, b\}$ ein Blocking-Pair; oder $b \neq M(a) \neq c$, dann wäre $\{a, c\}$ ein Blocking-Pair. In jedem Fall existiert ein Blocking-Pair. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass M stabil bezüglich P ist.

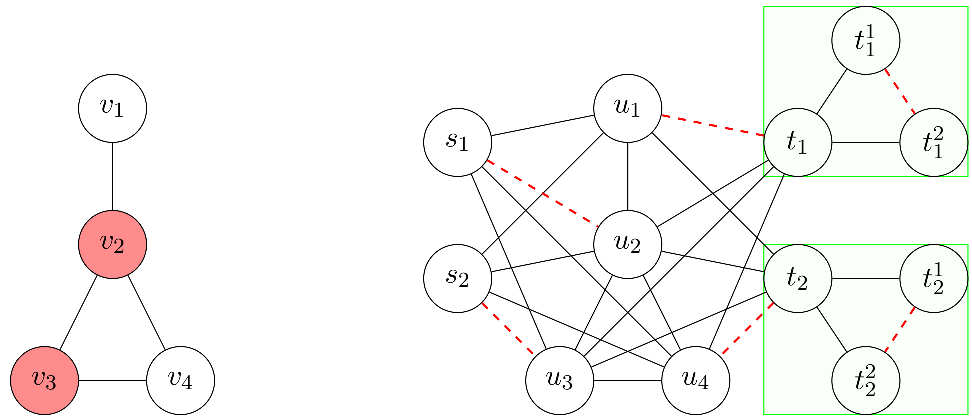
Da also in jedem stabilen Matching die Person a mit einer Person $u \in U$ gepaart ist, kann c nicht mit a gepaart sein. Wäre $\{b, c\} \notin M$ so wäre es ein Blocking-Pair, da sie sich ihren alternativen Partnern vorziehen. □

Dies nutzen wir später als ein Hilfsmittel, da wir damit sicherstellen können, dass in jedem stabilen Matching eine Person a mit einer Person $u \in U$ gepaart sein muss, egal wie unzufrieden u mit a ist.

Das Ursprungsproblem, Vertex Cover, stellt sich die Frage, ob zu einem gegebenen Graphen und einer natürlichen Zahl k eine Knotenüberdeckung der Größe von höchstens k existiert. Eine Knotenüberdeckung bezeichnet dabei eine Teilmenge der Knotenmenge des Graphen, die von jeder Kante mindestens einen Endknoten enthält. Vertex Cover ist wie folgt definiert:

Vertex Cover
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Existiert eine Knotenüberdeckung der Größe von höchstens k?

Eine Beispiel-Ja-Instanz für Vertex Cover mit $k = 2$ ist in Abbildung 7a zu sehen. Eine mögliche Knotenüberdeckung $\{v_2, v_4\}$ ist rot markiert. Die Idee hinter der Reduktion lässt sich am besten erkennen, wenn man den *zugrundeliegenden Graphen* der resultierenden Stable Roommate-Instanz betrachtet, der in Abbildung 7b zu sehen ist. Jeder Knoten des Ursprungsgraphen bekommt eine repräsentative Person, die am liebsten mit einem der zwei (k) „Selektoren“ s_1 und s_2 gepaart werden möchte. Die Personen, die nicht selektiert werden, also nicht mit einem „Selektor“ gepaart werden, werden durch unser zuvor konstruiertes Hilfsmittel (in der Abbildung grün markiert) gezwungen, mit einem der zwei ($|V| - k$) „Restsammler“ t_1 und t_2 ein Paar zu bilden. Da die Nachbarschaften im Ursprungsgraph in der Reduktion beibehalten werden, ergeben



(a) VERTEX COVER-Instanz mit Knotenüberdeckung.

(b) Zugrundeliegender Graph der resultierenden STABLE ROOMMATE-Instanz mit stabilen Matching.

Abbildung 7: Eine Beispielreduktion mit möglicher Lösung.

sich zwangsläufig Blocking-Pairs, wenn zwei benachbarte Personen mit zwei t's gepaart werden.

Formal: Sei $G = (V, E)$ und k eine Eingabe für VERTEX COVER und $p = |V|$. Es wird angenommen, dass $k < p$, da ansonsten die Lösung trivial V wäre. Konstruiere ein Präferenzprofil P wie folgt:

Für jeden Knoten $v_i \in V$ konstruiere eine Person u_i, wobei die Menge $N(u_i)$ alle Personen beinhaltet, die den Nachbarn von v_i entsprechen, das heißt $N(u_i) = \{u_j \mid \{v_i, v_j\} \in E\}$. Sei $U := \{u_1, \dots, u_p\}$ und O eine zufällige, aber eindeutige lineare Ordnung, die alle Personen in U ordnet. Konstruiere k Personen, genannt s_i $(1 \leq i \leq k)$. Konstruiere $(p-k)$ Personen, genannt t_i mit $1 \leq i \leq (p-k)$. Konstruiere für jede Person t_i zwei weitere Personen t_i^1 und t_i^2. Sei $S := \{s_1, \dots, s_k\}$, $T := \{t_1, \dots, t_{p-k}\}$, $T^1 := \{t_1^1, \dots, t_{p-k}^1\}$ und $T^2 := \{t_1^2, \dots, t_{p-k}^2\}$. Füge U, S, T, T^1, T^2 in das Präferenzprofil P mit folgenden Präferenzordnungen ein:

$$\begin{aligned}
u_i\colon &\ s_1 \succ \dots \succ s_k \succ [N(u_i)] \succ t_1 \succ \dots \succ t_{p-k} && (1 \leq i \leq p)\\
s_o\colon &\ u_1 \approx \dots \approx u_p && (1 \leq o \leq k)\\
t_l\colon &\ [U] \succ t_l^1 \succ t_l^2 && (1 \leq l \leq p-k)\\
t_l^1\colon &\ t_l^2 \succ t_l && (1 \leq l \leq p-k)\\
t_l^2\colon &\ t_l \succ t_l^1 && (1 \leq l \leq p-k)
\end{aligned}$$

Das Symbol $[X]$ bedeutet, dass alle Personen in X linear bezüglich O geordnet sind. Es ist ersichtlich, dass sich P in Polynomialzeit konstruieren lässt.

Zunächst wird gezeigt, dass jede Person aus U mit einer Person aus S gepaart sein muss.

Lemma 4.3. *In jedem stabilen Matching M für P muss jede Person $s \in S$ einen Partner aus U haben.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein stabiles Matching M für P, in dem ein $s \in S$ nicht mit einer Person aus U gepaart ist. Dann hätte dieses s keinen Partner ($M(s) = \perp$). Da $|U| > |S|$ gilt, muss es mindestens ein $u \in U$ geben, welches nicht mit einem s gepaart ist. Dann wären u und s ein Blocking-Pair. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass M stabil sei. □

Dass jede Person aus U mit einer Person aus T gepaart sein muss, folgt direkt aus Lemma 4.2, da t_i, t_i^1 und t_i^2 mit U die beschriebene Teilstruktur bilden:

Lemma 4.4. *In jedem stabilen Matching M für P muss jede Person t aus T einen Partner aus U haben und t_i^1 mit t_i^2 gepaart sein.*

Da $|U| = |S| + |T|$ gilt, ist zu erkennen, dass in einem stabilen Matching M für P jedes $u \in U$ entweder mit einem $s \in S$ oder mit einem $t \in T$ gepaart sein muss. Wobei die Personen $u_i \in U$, die mit einem $t \in T$ gepaart sind, der Ordnung O nach miteinander gepaart sein müssen: Damit ist gemeint, dass für die Personen in der Sequenz $(r_1, \ldots, r_{|R|})$, die sich ergibt, wenn man O auf $R = \{u_i \mid \exists t \in T \text{ mit } \{u_i, t\} \in M\}$ einschränkt, gelten muss, dass r_i mit t_i gepaart wird. Aus den vorangegangenen Lemmas 4.3, 4.4 und der Tatsache, dass $|U| = |S| + |T|$ gilt, ergibt sich:

Lemma 4.5. *In jedem stabilen Matching M für P muss jede Person aus P einen Partner haben.*

Nun sind wir bereit, zu zeigen, dass die Reduktion korrekt ist:

Lemma 4.6. *Wenn für einen Graphen $G = (V, E)$ eine Knotenüberdeckung C der Größe k existiert, dann existiert ein stabiles Matching M für P.*

Beweis. Da eine Knotenüberdeckung der Größe k existiert, gilt für die Teilmenge $C \subseteq V$, dass jede Kante in E mit mindestens einem Knoten aus C verbunden ist. Konstruiere das Matching M, indem jede Person $s_i \in S$ mit der Person c_i gepaart wird. Alle restlichen Personen $u \in U$ werden der Ordnung O nach mit $t_i \in T$ gepaart. Außerdem werden alle $t_i^1 \in T^1$ mit $t_i^2 \in T^2$ gepaart. Für jedes $u \in U$ gilt also, dass u entweder mit einem $s \in S$ oder mit einem $t \in T$ gepaart ist.

Angenommen es gäbe ein Blocking-Pair $\{i, j\}$. Dann können i oder j nicht in S sein, da alle Personen in S mit ihrer ersten Wahl gepaart sind. Weder i noch j können in T^1 oder T^2 sein, da keine Person in T einen Partner aus T^1 oder T^2 hat. Die Personen i und j können auch nicht beide in T sein, da Personen in T nicht untereinander gepaart werden können.

Es bleiben zwei Fälle übrig: Entweder eine Person aus U und eine Person aus T bilden ein Blocking-Pair oder zwei Personen aus U bilden ein Blocking-Pair.

Erster Fall: Angenommen für ein Blocking-Pair $\{i, j\}$ gilt $i \in U$ und $j \in T$, sei $j = t_k$. Aus unserer Konstruktion von M folgt, dass $M(j) \in U \backslash \{i\}$ und $M(i) \in S \cup T \backslash \{j\}$ gilt. Aus $M(i) \in S$ folgt $M(i) \succ_i j$, also muss $M(i) \in T$ sein. Sei $(r_1, \ldots, r_{|R|})$ die Sequenz, die sich ergibt, wenn man die Ordnung O auf $R = \{u_i \mid \exists t \in T \text{ mit } \{u_i, t\} \in M\}$ beschränkt. Sei $i = r_h$. Da alle Personen in R mit den Personen in T der Ordnung O

nach gepaart wurden, gilt $M(j) = r_k$ und $M(i) = t_h$, wobei $h \neq k$. Da i und j ein Blocking-Pair bilden, muss $t_k \succ_i t_h$ ($j \succ_i M(i)$) und $r_h \succ_j r_k$ ($i \succ_j M(j)$) gelten. Dies ist ein Widerspruch, da gleichzeitig $k > h$, durch die Präferenz von i, und $h > k$, durch die Präferenz von i gelten muss.

Zweiter Fall: Angenommen für ein Blocking-Pair $\{i, j\}$ gilt $i, j \in U$. Aus unserer Konstruktion von M folgt, dass $M(i) \in S \cup T \backslash \{j\}$ und $M(j) \in S \cup T \backslash \{i\}$ gilt. Da aus $M(i) \in S$ folgt $M(i) \succ_i j$ und aus $M(j) \in S$ folgt $M(j) \succ_j i$, muss $M(i) \in T$ und $M(j) \in T$. Seien l und m die Knoten, die i und j in G repräsentieren. Da $j \in A_i$, müssen l und m mit einer Kante verbunden sein. Da $M(i), M(j) \notin S$ gilt, folgt aus der Konstruktion von M, dass $m, l \notin C$. Dies steht im Widerspruch, dass C eine Knotenüberdeckung bildet.

□

Lemma 4.7. *Wenn für einen Graphen $G = (V, E)$ keine Knotenüberdeckung der Größe k existiert, dann existiert kein stabiles Matching M für P.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein stabiles Matching M für P. Aus Lemma 4.3 und Lemma 4.4 folgt, dass jede Person $u \in U$ entweder mit einer Person $s \in S$ oder mit einer Person $t \in T$ gepaart sein muss. Sei $R = \{r_1, \ldots, r_{p-k}\} \subseteq U$ die Menge der Personen aus U, die jeweils mit einer Person $t \in T$ gepaart sind. Da es keine Knotenüberdeckung der Größe k gibt, muss es zwei Personen $r_i, r_j \in R$ geben, deren Repräsentanten $v_i, v_j \in V$ in G eine verbindende Kante haben. Somit ist $r_i \in N(r_j)$ und $r_j \in N(r_i)$. Daraus folgt, dass $\{r_i, r_j\}$ ein Blocking-Pair ist, da $r_j \succ_{r_i} M(r_i)$ und $r_i \succ_{r_j} M(r_j)$. □

Definiert man die lineare Ordnung $\rhd$ mit

$$s_1 \rhd \ldots \rhd s_k \rhd u_1 \rhd \ldots \rhd u_p \rhd t_1^1 \rhd \ldots \rhd t_{p-k}^1 \rhd t_1^2 \rhd \ldots \rhd t_{p-k}^2 \rhd t_1 \rhd \ldots \rhd t_{p-k},$$

so ist aufgrund der unvollständigen Präferenzordnungen mit Ties das konstruierte Präferenzprofil P single-peaked bezüglich $\rhd$. Somit folgt aus Lemma 4.6, Lemma 4.7 und Beobachtung 4.1:

Satz 4.1. Stable Roommate *mit unvollständigen Präferenzprofilen und Ties ist NP-vollständig, auch wenn das eingegebene Präferenzprofil single-peaked ist.*

4.2.2 Single-Crossing

Um zu zeigen, dass Stable Roommate NP-vollständig bleibt, selbst wenn die Eingabe die Single-Crossing-Eigenschaft erfüllt, kann dieselbe Reduktion verwendet werden, wie in Abschnitt 4.2.1. Definiert man nämlich die lineare Ordnung $\rhd$ mit

$$u_1 \rhd \ldots \rhd u_p \rhd t_1 \rhd \ldots \rhd t_{p-k} \rhd t_1^1 \rhd \ldots \rhd t_{p-k}^1 \rhd t_1^2 \rhd \ldots \rhd t_{p-k}^2 \rhd s_1 \rhd \ldots \rhd s_k,$$

so ist die resultierende Stable Roommate-Instanz single-crossing bezüglich $\rhd$, da erstens zwei Personen, die aus zwei verschiedenen Mengen kommen, auch immer in der gleichen Reihenfolge in den Präferenzordnungen auftauchen und zweitens alle Personen innerhalb der einzelnen Mengen S, T, T^1, T^2 in jeder Präferenzordnung immer in der gleichen Reihenfolge auftauchen. Eine Ausnahme stellt U dar, da die Personen in S Ties zwischen den Personen in U besitzen. Das ist aber kein Problem, da die Personen aus S in $\rhd$ zum Schluss kommen. Dadurch kann kein „Crossing" durch zwei Personen innerhalb von U produziert werden.

Satz 4.2. Stable Roommate *mit unvollständigen Präferenzprofilen und Ties ist NP-vollständig, auch wenn das eingegebene Präferenzprofil single-crossing ist.*

Da dieselbe Reduktion verwendet wurde, folgt, dass auch die Kombination aus Single-Peaked und Single-Crossing das Stable Roommate nicht leichter macht:

Satz 4.3. Stable Roommate *mit unvollständigen Präferenzprofilen und Ties ist NP-vollständig, auch wenn das eingegebene Präferenzprofil single-peaked und single-crossing ist.*

5 Ausblick

Die Einschränkungen Narzissmus, Single-Peaked und Single-Crossing scheinen auch in Kombination kaum Auswirkung auf unvollständige Präferenzen zu haben, da keine Erleichterung der Probleme durch diese Restriktion erkannt werden konnte. In den unvollständigen Fällen gilt auch nicht mehr die Aussage, dass Narzissmus und Single-Crossing zu Single-Peaked führen. In vollständigen Präferenzprofilen ist dagegen gerade im sonst NP-vollständigen Fall mit Ties eine erhebliche Erleichterung der Problematik festgestellt worden. Deshalb ergaben sich zwei Vermutungen, die aufgrund von Zeitmangel nicht mehr betrachtet werden konnten und die Tabelle 1 vervollständigen würden. Erstens, dass selbst mit Narzissmus und Single-Peaked-/Single-Crossing-Einschränkung das Stable Roommate mit Ties und unvollständigen Präferenzprofilen NP-vollständig ist (lässt sich vermutlich durch eine Abwandlung der Reduktion von Ronn [Ron90] zeigen) und zweitens, dass Stable Roommate mit Ties und vollständigen Präferenzprofilen in Polynomialzeit lösbar ist, wenn das Präferenzprofil nur single-peaked oder nur single-crossing beschränkt ist.

Weitere Nachforschungen könnten in dem Bereich von Narzissmus und α-Restricted getätigt werden, um zu klären, ob in diesem Fall immer ein stabiles Matching für das Stable Roommate ohne Ties und mit vollständigen Präferenzprofilen in polynomieller Zeit gefunden werden kann. Außerdem könnte der Fall diskutiert werden, ob ein narzisstisch und δ-restricted beschränktes, vollständiges Präferenzprofil ohne Ties existiert, welches zwei stabile Matchings besitzt und ob Narzissmus und γ-Restricted immer ein stabiles Matching garantieren. Außerdem sind die Einschränkungen noch ungeklärt, die nötig sind damit die allgemeine Version des Algorithmus von Bartholdi und Trick [BT86] auf unvollständigen Präferenzprofilen ohne Ties ein eindeutiges Matching findet. Als letzte offene Frage ergab sich die Anzahl der narzisstisch und single-crossing beschränkten, vollständigen Präferenzprofile ohne Ties. Es existiert eine Bijektion zwischen den Präferenzprofilen mit n Personen und der Anzahl der semistandard Young-Tableaux in $(n-1, n-2, \dots, 1)$-Konfiguration, wodurch die vermutete Formel wahrscheinlich bestätigt werden kann.

Auf dieser Arbeit aufbauend ergibt sich die parametrisierte Komplexitätsanalyse des Stable Roommate als ein interessantes Forschungsgebiet. Mögliche sinnvolle Parameter sind zum Beispiel die Anzahl der Ties, die Breite von Ties oder Anzahl der Personen, die in Ties auftauchen. Diese Parametrisierungen können auch kombiniert mit einem weiteren Parameter betrachtet werden, der die Unvollständigkeit der Präferenzordnungen beschränkt. Es können Experimente und Evaluierungen getätigt werden, die zum Beispiel die Häufigkeit der betrachteten Einschränkungen in größeren Instanzen zählen und analysieren. Außerdem wäre es Interessant die Einflüsse der betrachteten Einschränkungen auf das allgemeinere Stable Roommate-Problem namens Minimal Blocking Pairs zu erforschen, welches mit einem zusätzlichen Parameter als Eingabe die Anzahl der Blocking-Pairs in einem Matching beschränkt.

Literaturverzeichnis

[BCW13] R. Bredereck, J. Chen und G. J. Woeginger. „A Characterization of the Single-Crossing Domain“. In: *Social Choice and Welfare* 41.4 (2013), S. 989–998 (siehe S. 10, 12).

[BH11] M. A. Ballester und G. Haeringer. „A Characterization of the Single-Peaked Domain“. In: *Social Choice and Welfare* 36.2 (2011), S. 305–322 (siehe S. 11).

[Bla48] D. Black. „On the Rationale of Group Decision-Making“. In: *Journal of Political Economy* 56.1 (1948), S. 23–34 (siehe S. 3).

[BM11] S. Barberà und B. Moreno. „Top Monotonicity: A Common Root for Single Peakedness, Single Crossing and the Median Voter Result“. In: *Games and Economic Behavior* 73.2 (2011), S. 345–359 (siehe S. 18).

[BT86] J. Bartholdi und M. A. Trick. „Stable Matching with Preferences Derived from a Psychological Model“. In: *Operations Research Letters* 5.4 (1986), S. 165–169 (siehe S. III, IV, 4–6, 9, 13, 15, 16, 18, 21, 25, 32).

[Dem94] G. Demange. „Intermediate Preferences and Stable Coalition Structures“. In: *Journal of Mathematical Economics* 23.1 (1994), S. 45–58 (siehe S. 3).

[DF94] J.-P. Doignon und J.-C. Falmagne. „A Polynomial Time Algorithm for Unidimensional Unfolding Representations“. In: *Journal of Algorithms* 16.2 (1994), S. 218–233 (siehe S. 9, 10).

[EFS12] E. Elkind, P. Faliszewski und A. Slinko. „Clone Structures in Voters’ Preferences“. In: *Proceedings of the 13th ACM conference on electronic commerce*. ACM. 2012, S. 496–513 (siehe S. 10).

[EFS14] E. Elkind, P. Faliszewski und P. Skowron. „A Characterization of the Single-Peaked Single-Crossing Domain“. In: *Proceedings of the Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2014, S. 654–660 (siehe S. 5, 18, 23, 25).

[Elk+15] E. Elkind, P. Faliszewski, M. Lackner und S. Obraztsova. „The Complexity of Recognizing Incomplete Single-Crossing Preferences“. In: *Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2015, S. 865–871 (siehe S. 10).

[ELÖ08] B. Escoffier, J Lang und M. Öztürk. „Single-Peaked Consistency and its Complexity“. In: *18th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI’08)*. 2008, S. 366–370 (siehe S. 9).

[GI89] D. Gusfield und R. W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. 1989 (siehe S. 3, 6, 26).

[GMG86] Z. Galil, S. Micali und H. Gabow. „An $O(EV \log V)$ Algorithm for Finding a Maximal Weighted Matching in General Graphs“. In: *SIAM Journal on Computing* 15.1 (Feb. 1986), S. 120–130 (siehe S. 1).

[GS62] D. Gale und L. S. Shapley. „College Admissions and the Stability of Marriage". In: *The American Mathematical Monthly* 69.1 (1962), S. 9–15 (siehe S. 1, 2).

[IM08] K. Iwama und S. Miyazaki. „A Survey of the Stable Marriage Problem and Its Variants". In: *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-circulating Society (ICKS)*. IEEE. Jan. 2008, S. 131–136 (siehe S. 8).

[Irv07] R. W. Irving. „The Cycle Roommates Problem: a Hard Case of Kidney Exchange". In: *Information Processing Letters* 103.1 (2007), S. 1–4 (siehe S. 2).

[Irv85] R. W. Irving. „An Efficient Algorithm for the "Stable Roommates" Problem". In: *Journal of Algorithms* 6.4 (1985), S. 577–595 (siehe S. 2, 3, 6, 26).

[KLM99] E. Kujansuu, T. Lindberg und E. Mäkinen. „The Stable Roommates Problem and Chess Tournament Pairings". In: *Divulgaciones Matemáticas* 7.1 (1999), S. 19–28 (siehe S. 2).

[Knu97] D. E. Knuth. *Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems*. Bd. 10. CRM Proceedings and Lecture Notes. American Mathematical Society, 1997. (Englische Übersetzung von *Marriages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976) (siehe S. 2).

[Lac14] M. Lackner. „Incomplete Preferences in Single-Peaked Electorates". In: *Proceedings of the Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2014, S. 742–748 (siehe S. 9).

[Law01] E. L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Courier Corporation, 2001 (siehe S. 1).

[MR81] A. H. Meltzer und S. F. Richard. „A Rational Theory of the Size of Government". In: *The Journal of Political Economy* 89.5 (1981), S. 914–927 (siehe S. 3).

[MW71] D. G. McVitie und L. B. Wilson. „Three Procedures for the Stable Marriage Problem". In: *Communications of the ACM* 14.7 (Juli 1971), S. 491–492 (siehe S. 2).

[Rob77] K. W. Roberts. „Voting Over Income Tax Schedules". In: *Journal of Public Economics* 8.3 (1977), S. 329–340 (siehe S. 3).

[Ron90] E. Ronn. „NP-Complete Stable Matching Problems". In: *Journal of Algorithms* 11.2 (1990), S. 285–304 (siehe S. 2, 6, 26, 32).

[RSÜ05] A. E. Roth, T. Sönmez und M. U. Ünver. „Pairwise Kidney Exchange". In: *Journal of Economic Theory* 125.2 (2005), S. 151–188 (siehe S. 2).

[Spe14] J. Spencer. *Asymptopia*. Bd. 71. American Mathematical Society, 2014 (siehe S. 18).