11. Aufgabenblatt

(Besprechung in den Tutorien 17.01.2022–21.01.2022)

Aufgabe 1. Polynomzeitreduktionen und NP

Sei Σ ein endliches Alphabet und bezeichne $A \leq_m^p B$ die Relation „A ist polynomiell reduzierbar auf B“. Diskutieren Sie die Korrektheit folgender Behauptungen.

(a) Für alle $A, B, C \subseteq \Sigma^*$, falls $A \leq_m^p B$ und $A \leq_m^p C$, dann $B \leq_m^p C$.

(b) Wenn $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann gilt für alle $A \in \mathrm{NP} \setminus \{\Sigma^*, \emptyset\}$, dass A NP-schwer ist.

(c) Für alle $A, B \in \mathrm{NP}$ gilt, dass, wenn $A \leq_m^p B$, dann $B \leq_m^p A$.

Aufgabe 2. Polynomzeitreduktionen und Halteproblem

Sei $H = \{w\#x \mid \exists M\colon w = \langle M\rangle \text{ und } M \text{ hält auf Eingabe } x\}$ das allgemeine Halteproblem. Welche der folgenden Aussagen gelten?

1. $H \leq_m^p \mathrm{SAT}$
2. $\mathrm{SAT} \leq_m^p H$
3. H ist NP-schwer
4. H ist NP-vollständig

Aufgabe 3. Polynomzeitreduktion I

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme.

Vertex Cover
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.
Frage: Existiert eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass für jede Kante $\{v, w\} \in E$ einer der beiden Endpunkte in X enthalten ist, d.h. $v \in X$ oder $w \in X$?

Steinerbaum
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Teilmenge von Knoten $T \subseteq V$ und eine natürliche Zahl k.
Frage: Existiert eine Kantenteilmenge $E' \subseteq E$ mit $|E'| \leq k$, sodass im Graph $G' = (V, E')$ alle Knoten in T in derselben Zusammenhangskomponente sind?

Gegeben sei die Funktion f, die wie folgt definiert ist. Sei $(G = (V, E), k)$ eine Vertex Cover-Instanz, dann ist $f((G, k)) = (G^* = (V^*, E^*), T^*, m + k)$ eine Steinerbaum-Instanz, wobei gilt:

1. Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es einen Knoten $v^* \in V^*$.
2. Für jede Kante $e \in E$ gibt es einen Knoten $e^* \in V^*$.
3. Zudem gibt es einen Knoten $z \in V^*$.
4. Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es die Kante $\{z, v^*\} \in E^*$.
5. Für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ gibt es die Kanten $\{e^*, v^*\} \in E^*$ und $\{e^*, w^*\} \in E^*$.
6. Setze $T^* := \{e^* \mid e \in E\} \cup \{z\}$.

Beweisen Sie, dass die gegebene Funktion f eine polynomielle Reduktion von Vertex Cover auf Steinerbaum ist.

Aufgabe 4. Polynomzeitreduktion II (Schriftlicher Test WS 19/20)

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme.

Vertex Cover
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.
Frage: Existiert eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass für jede Kante $\{v, w\} \in E$ mindestens einer der beiden Endpunkte in X enthalten ist, d.h. $v \in X$ oder $w \in X$?

Feedback Vertex Set
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.
Frage: Existiert eine Knotenmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass jeder Kreis in G mindestens einen Knoten aus X enthält?

Zeigen Sie, dass Vertex Cover $\leq_m^p$ Feedback Vertex Set.