

Synergie zwischen ÖPNV und Radfahren, modelliert als Routing in Temporalen Graphen

Bachelorarbeit

von **Laurenz Rasche**

zur Erlangung des Grades „Bachelor of Science“ (B. Sc.)
im Studiengang Informatik

Erstgutachter: Prof. Dr. Rolf Niedermeier
Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Skutella
Betreuer: Dr. Till Fluschnik, Philipp Zschoche,
Prof. Dr. Rolf Niedermeier

Dezember 2020

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenhändige Ausfertigung versichert an Eides statt

Berlin, den

Datum

Unterschrift

Zusammenfassung

Der öffentliche Personennahverkehr (ÖPNV) spielt eine zentrale Rolle im urbanen Personenverkehr. Die meisten Städte verfügen über ein gut ausgebautes Schienennetzwerk, welches durch Buslinien ergänzt wird. Dennoch kommt es vor, dass einige Strecken, beispielsweise aufgrund von mehrfachem Umsteigen mit eventuell hohen Wartezeiten, überdurchschnittlich viel Zeit in Anspruch nehmen. Eine Möglichkeit, um solche Strecken schneller zurückzulegen, bietet die intermodale Nutzung von Radfahren und öffentlichen Verkehrsmitteln. Dabei bildet sich eine Synergie aus den beiden Verkehrsmitteln, welche wir mittels frei verfügbarer Daten und Routing in temporalen Graphen analysieren. Um diese zusätzlich im Zusammenhang mit Leihradssystemen zu untersuchen, entwickeln wir einen Algorithmus zur Berechnung von frühestmöglichen temporalen Pfaden unter lokalen Beschränkungen. Wir vergleichen mithilfe unseres Algorithmus die Fahrzeiten für verschiedene Nutzungsarten des ÖPNVs in Berlin und Hamburg.

Abstract

Public transport systems play a central role in urban passenger transport. Most cities have well-developed rail networks which are supplemented by bus lines. Yet it happens that some routes, for example due to multiple changes with possibly high waiting times, take an above-average amount of travel time. A possibility to cover such routes faster, offers the intermodal use of cycling and public transport. A synergy between the two means of transport arise, which we analyze using open access data and routing in temporal graphs. To investigate these additionally in the context of bike-sharing systems, we develop an algorithm computing the earliest-arrival temporal paths under local restrictions. We use our algorithm to compare the travel times for different types of public transport use in Berlin and Hamburg.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Stand der Forschung	10
1.2	Ergebnisse.	11
2	Notation und Grundlegendes	13
3	Globale Beschränkung	19
4	Lokale Beschränkung	23
4.1	Dynamisches Programm	24
4.2	Greedy-Strategie	27
5	Experimente	39
5.1	Datenerzeugung	39
5.2	Reichweite für Fahrten aus dem Stadtzentrum	41
5.3	Quantitative Analyse von mehreren Startpunkten	46
5.4	Isochrone Karten für Hamburg	52
6	Fazit	57
	Literatur	59

1 Einführung

Der Verkehr ist mit 167 Millionen Tonnen CO₂-Äquivalenten¹², dies entspricht einem Gesamtanteil von 18,4%, der dritt größte Emissionsverursacher in Deutschland [Umw19]. Personenkraftwagen tragen dabei mit 61% den größten Anteil an Treibhausgasen im Verkehr bei [Umw19]. Zudem hat die Verkehrsleistung im Personenverkehr zwischen 1991 und 2016 um 31% zugenommen [Umw19]. In Metropolen ist der Trend mit 40% Zuwachs in der Verkehrsleistung zwischen 2002 und 2017 noch stärker [Inf19]. Obwohl in den meisten Großstädten ein breites Angebot an öffentlichem Nahverkehr besteht [BUD13] und fehlender Parkraum ein zunehmendes Problem wird [CLOPM16], zeichnet sich das Auto weiterhin als meist genutztes Verkehrsmittel ab [Inf19]. Allerdings zeichnet sich besonders im städtischen Raum ein Trend weg vom Auto und in Richtung von Fahrrad und öffentlichen Personennahverkehr (ÖPNV) ab [JO17].

Eine meist übersehene Alternative zu den etablierten Verkehrsmitteln bietet die vereinigte Nutzung von Fahrrad und ÖPNV [KBB16], welche wir im folgenden als *Rad-Transit* bezeichnen. Dabei entsteht eine Synergie zwischen den beiden Verkehrsmitteln, welche die Flexibilität und gleichmäßige Zugänglichkeit des Radfahrens mit den hohen Geschwindigkeiten und der damit verbundenen Reichweite des ÖPNVs kombiniert [KBB16]. Dadurch bietet Rad-Transit Vorteile in Geschwindigkeit, Zugänglichkeit und Reichweite, welche die beiden Verkehrsmittel bei einzelner Nutzung nicht aufweisen und kann dadurch besser mit dem motorisiertem Individualverkehr konkurrieren [KBB16]. Solch eine vereinigte Nutzung von mehreren Verkehrsmitteln auf dem selben Weg, wird als *Intermodalität* bezeichnet [JCB00]. Dabei gibt es verschiedene Auffassungen ab wann ein Weg als intermodal bezeichnet wird. Wir fassen in diesem Zusammenhang den gesamten ÖPNV inklusive der benötigten Fußwege als ein Verkehrsmittel auf und bezeichnen diesen dementsprechend als *unimodales* Verkehrsmittel.

Da besonders in Großstädten ein breites Angebot an ÖPNV besteht [BUD13] und hier die Verkehrsleistung überdurchschnittlich stark gestiegen ist [Inf19], untersuchen wir in dieser Arbeit die Auswirkungen von Rad-Transit im urbanen Raum. Ziel dabei ist es, die Vorteile von Rad-Transit zu charakterisieren und diese durch eine empirische Analyse aufgrund von Experimenten quantitativ zu belegen.

¹Emissionen anderer Treibhausgase als Kohlendioxid (CO₂) werden zur besseren Vergleichbarkeit entsprechend ihrem globalen Erwärmungspotenzial in CO₂ umgerechnet (CO₂ = 1) [Umw19, S. 57].

²Referenzwert aus dem Jahr 2017.

1 Einführung

Der Fokus der Analyse liegt hierbei besonders auf folgenden Fragen:

1. Wie hoch ist die Zeitersparnis im Vergleich zur unimodalen ÖPNV-Nutzung?
2. Wie verändert sich die Zugänglichkeit bei Rad-Transit im Vergleich zur unimodalen ÖPNV-Nutzung?
3. Welche Stadtgebiete profitieren am stärksten durch die Nutzung von Rad-Transit?

Als exemplarisches Beispiel fokussiert sich die Analyse auf Berlin und Hamburg. Aufgrund fehlender Informationen im GTFS-Datensatz für Hamburg erfolgt eine detaillierte Analyse ausschließlich für Berlin.

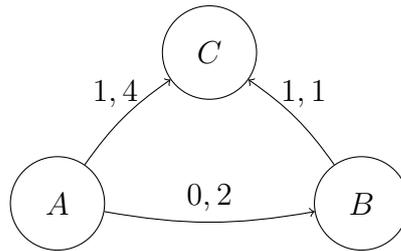


Abbildung 1.1: Der temporale Graph G_1

Methodik. Um die empirische Analyse von Rad-Transit im urbanen Raum durchzuführen modellieren wir das unterliegende Verkehrsnetzwerk aufgrund von offenen Daten. Die Datengrundlage für das Straßenverkehrsnetz bildet der offene Kartendienst *Open-Street-Maps* (OSM) [Ope17]. Die Fahrpläne und Lage der ÖPNV-Stationen werden aus dem *General Transit Feed Specification* (GTFS) Format bezogen. Das resultierende Modell wird in der Form eines *temporalen Graphen* repräsentiert.

Temporale Graphen beschreiben, genau wie herkömmliche Graphen, Relationen zwischen *Knoten* einer *Knotenmenge* V . Allerdings sind die Relationen bei temporalen Graphen auf bestimmte Zeitpunkte fixiert. Dadurch ist eine *temporale Kante* e eine gerichtete Verbindung zwischen zwei Knoten u und v zum Zeitpunkt t . Zusätzlich zur *Abreisezeit* t enthält jede temporale Kante e eine Gewichtung λ , welche wir folgend als *Reisezeit* bezeichnen.

Definition 1.1 (Temporaler Graph). Ein temporaler Graph G ist ein Tripel der Form (V, E, L) , mit einer Lebensdauer $L \in \mathbb{N}$, einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq V \times V \times \{0, \dots, L\} \times \{1, \dots, L\}$. Eine Kante e ist demnach ein Quadrupel der Form (u, v, t, λ) . Abreise- und Reisezeit einer temporalen Kante e werden als $t(e)$ und $\lambda(e)$ notiert. Die *Ankunftszeit* einer temporalen Kante e ist die Summe aus Abreisezeit und Reisezeit, also $t(e) + \lambda(e)$.

In unserem Fall modellieren wir die Stationen des ÖPNVs als Knoten und einzelne Fahrten zwischen zwei Stationen als temporale Kanten. Da die von uns modellierten Netzwerke mit dem Straßenverkehrsnetz auch eine *permanente* Komponente besitzen, welche

zeitlich invariant ist, befassen wir uns mit einer speziellen Unterklasse der temporalen Graphen, welche wir als *semi-temporale Graphen* bezeichnen. Eine formale Definition folgt in Kapitel 2.

Um die Fahrzeiten zu berechnen, befassen wir uns mit *temporalen Pfaden*. Ein temporaler Pfad P ist eine Sequenz von temporalen Kanten e_i , so dass zwei aufeinander folgende temporale Kanten den gleichen Ziel- beziehungsweise Startknoten haben. Zudem muss ein temporaler Pfad zusätzlich die zeitliche Ordnung einhalten, so dass die Abreisezeit einer temporalen Kante nicht kleiner als die Ankunftszeit der vorhergehenden temporalen Kante sein darf.

Definition 1.2 (Temporaler Pfad). Ein temporaler Pfad P ist eine Sequenz von temporalen Kanten $((v_{i-1}, v_i, t_i, \lambda_i))_{i=1}^k$, sodass $t_i + \lambda_i \leq t_{i+1}$ für alle $i \in [k - 1]$ und $t_k + \lambda_k \leq L$.

Folgendes Beispiel illustriert wie sich die zeitliche Abhängigkeit der temporalen Kanten auf temporale Pfade auswirkt.

Beispiel 1. In Abbildung 1.1 ist der temporale Graph $G_1 := (V, E, 5)$ mit $V := \{A, B, C\}$ und $E := \{(A, B, 0, 2), (A, C, 1, 4), (B, C, 1, 1)\}$ abgebildet. Dazu wird jede Kante aus G_1 als ein Pfeil zwischen Start- und Zielknoten dargestellt, wobei die Zahlen auf dem Pfeil Abreisezeit und Reisezeit entsprechen. Wenn wir G_1 als einen herkömmlichen Graphen betrachten, dann wäre (A, B, C) ein gültiger Pfad von A nach B . Aufgrund der zeitlichen Abhängigkeiten ist dies jedoch nicht der Fall, da die Ankunftszeit der temporale Kante $(A, B, 0, 2)$ größer als die Abreisezeit von der temporalen Kante $(B, C, 1, 1)$ ist.

Zur Berechnung der Fahrzeit beziehen wir uns auf *frühestmögliche* temporale Pfade in temporalen Graphen. Frühestmögliche temporale Pfade sind temporale Pfade, welche bezüglich ihrer Ankunftszeit kleinstmöglich sind. Um die Anforderungen an die verschiedenen Verkehrsmittel möglichst genau abzubilden, benutzen wir für unserer Analyse temporale Pfade unter spezifischer Beschränkung. Eine spezifische Beschränkung ist eine zeitliche Schranke, welche einzelne Verkehrsmittel seperat begrenzt. Zum Beispiel kann bei der unimodalen Nutzung des ÖPNVs die Zeit zu Fuß beschränkt werden, um lange Fußwege auszuschließen. Wir unterscheiden zwischen zwei Arten von spezifischer Beschränkung. Die *globale Beschränkung*, welche die gesamte Nutzung eines Verkehrsmittels innerhalb einer Reise beschränkt und die *lokale Beschränkung*, welche lediglich zusammenhängende Fahrten mit dem gleichen Verkehrsmittel beschränkt.

Anschließend können wir so die Fahrzeiten für verschiedene Verkehrsmittel und Verkehrsmittelkombinationen in dem von uns modellierten temporalen Graphen berechnen und vergleichen diese miteinander. Der Vergleich bezieht sich dabei im wesentlichen auf zwei Kriterien:

1. Die Gleichmäßigkeit der Zugänglichkeit: Wie stark variieren die Fahrzeiten bei Wegen gleicher Entfernung.
2. Die durchschnittliche Zeitersparnis: Wie viel Zeit wird im Durchschnitt eingespart je nach genutztem Verkehrsmittel.

Außerdem untersuchen wir für die verschiedenen Verkehrsmittel die Reichweite innerhalb von 45 min ausgehend vom Stadtzentrum.

1.1 Stand der Forschung

Wir kategorisieren den Stand der Forschung folgendermaßen:

Temporale Graphen. Temporale Graphen haben in den letzten Jahren immer mehr Aufmerksamkeit genossen [Hol15; HS19]. Grundlegende Konzepte, wie *temporaler Zusammenhang* [KKK02; Nic+12] und *s-z-Trennung* [Flu+20; Zsc+20] wurden in temporalen Graphen bereits mehrfach beschrieben. Andere Graph-Metriken, wie zum Beispiel der *Radius*, *Durchmesser* oder die *Betweenness-Zentralität* werden durch optimale Pfade definiert. Da in temporalen Graphen neue Kriterien hinzukommen, welche es in herkömmlichen Graphen nicht gibt, ergeben sich verschiedene Definitionen für optimale temporale Pfade. So haben Wu u. a. [Wu+14] effiziente Algorithmen vorgestellt, welche folgende vier Kriterien bei temporalen Pfaden optimieren: die *frühestmögliche Ankunftszeit*, analog die *spätestmögliche Abfahrtszeit*, die *schnellste Reisezeit* oder die *kürzeste Reisezeit*. Die von Wu u. a. [Wu+14] entwickelten Algorithmen laufen in Linearzeit beziehungsweise Quasilinearzeit bezüglich der Kantenanzahl. Wir fokussieren uns in dieser Arbeit auf temporale Pfade mit frühestmöglicher Ankunftszeit. Allerdings erweitern wir das Problem der frühestmöglichen temporalen Pfade um die zusätzliche Bedingung der lokalen Beschränkung im Kontext von *semi-temporalen* Graphen. Bezüglich der globalen Beschränkung überschneidet sich dieses Thema mit dem temporalen *Multi-objective* Routing. Auch dieses Thema wurde auf temporalen Graphen bereits untersucht. Dabei gibt es zwei grundsätzliche Unterschiede in der Optimierung der Kriterien. Zum einen können mehrere Kriterien, je nach Bedeutung als Linearkombination zu einer Kostenfunktion aggregiert werden, welche anschließend zur Optimierung genutzt wird. Bentert u. a. [Ben+20] haben zum Beispiel sieben Kriterien auf temporalen Pfaden unter angegebener Gewichtung in einer Kostenfunktion vereint. Der zweite Ansatz des temporalen *Multi-objective* Routing ist das Suchen aller *Pareto-optimalen* temporalen Pfade. Dabei ist ein temporaler Pfad Pareto-optimal, wenn sich kein Kriterium verbessern lässt, ohne dabei ein anderes zu verschlechtern. Gräbener, Berro und Duthen [GBD10] haben eine angepasste Form des *Martin's Algorithmus* für temporale Graphen entwickelt, um temporale Pfade zu suchen, welche bezüglich mehrerer Kriterien optimal sind, allerdings ohne dabei eine Laufzeitbeschränkung festzulegen. Diese Art von temporalem *Multi-objective* Routing ist dem von uns beschriebenen Problem der temporalen Pfade unter globaler Beschränkung am ähnlichsten. Nach unserem Wissensstand gibt es bisher keine Forschung bezüglich frühestmöglicher temporaler Pfade unter lokaler Beschränkung.

Intermodalität mit Fahrrad und ÖPNV. Intermodalität im urbanen Raum hat ebenfalls an Bedeutung gewonnen. So ist der Anteil der Verkehrsteilnehmer, welche mehr als ein Verkehrsmittel pro Weg nutzen, in den letzten Jahren gestiegen [JO17]. Kager, Bertolini und Brömmelstroet [KBB16] haben die Vorteile von Rad-Transit beschrieben und argumentieren aufgrund dessen, dass Rad-Transit als eigenständiger Verkehrsmodus wahrgenommen werden sollte und entsprechend in der Verkehrsplanung berücksichtigt werden sollte. Mil u. a. [Mil+20] untersuchten verschiedene Parameter, wie zum Beispiel

die Fahrzeit zur nächsten Station, die Anzahl der Umstiege, oder die Kosten/Zeit, welche fürs Fahrradparken benötigt wird, und deren Auswirkungen auf die Nutzung von Rad-Transit. Jarass und Oostendorp [JO17] haben eine Nutzungsstatistik für Berlin basierend auf Stichproben durchgeführt mit dem Ergebnis, dass ca. 1.2% aller Wege in Berlin intermodal mit Fahrrad und ÖPNV zurückgelegt werden. Oostendorp und Gebhardt [OG18] analysieren den täglichen Gebrauch von Intermodalität in Berlin und kamen dabei zu dem Ergebnis, dass 9.9% der Befragten täglich und 23.2% unregelmäßig Rad-Transit nutzen. Einen weiteren Ansatz bildet Jäppinen, Toivonen und Salonen [JTS13], indem frei verfügbare Daten genutzt wurden, um die potentielle Auswirkung eines Leihradsystems in der Region Helsinki zu prognostizieren. Der Fokus liegt dabei auf der durchschnittlich eingesparten Reisezeit und auf den best geeigneten Standorten für ein Leihradsystem, beides bedingt durch die Siedlungsregionen in und um Helsinki als Startpunkte und verschiedene *points-of-interest* innerhalb Helsinikis als Ziele. Der Ansatz von Jäppinen, Toivonen und Salonen [JTS13] ist dieser Arbeit am ähnlichsten von den oben genannten. Jedoch fokussieren wir uns in dieser Arbeit nicht auf konkrete Verkehrsflüsse, sondern auf die generellen Vorteile von Rad-Transit gegenüber der unimodalen ÖPNV-Nutzung. Aus diesem Grund sind die von uns entwickelten Methoden auf beliebige Städte übertragbar³, so dass die Auswirkungen von Rad-Transit für verschiedene Städte ohne zusätzliche Information untersucht werden können.

1.2 Ergebnisse.

In Kapitel 3 zeigen wir, dass das Suchen von temporalen Pfaden unter globaler Beschränkung NP-vollständig ist. Zudem lässt sich das Problem als ein Spezialfall von temporalem *Multi-objective* Routing formulieren, so dass wenn es eine Lösung gibt, diese in der Menge der Pareto-optimalen temporalen Pfaden liegt. Da Multi-objective Routing auch auf temporalen Graphen bereits von Gräbener, Berro und Duthen [GBD10] beschrieben wurde, und aufgrund der Größe des von uns verwendeten temporalen Graphen ($|V| > 161.000$ $|E| > 600.000$), und der Menge an Anfragen (1.000 pro Verkehrsmodus), eine quantitative Analyse zu zeitintensiv wäre, werden temporale Pfade unter globaler Beschränkung in dieser Arbeit ansonsten nicht weiter thematisiert.

Stattdessen legen wir den Fokus auf frühestmögliche temporale Pfade unter lokaler Beschränkung. Um diese zu suchen entwickeln wir in Kapitel 4 einen *Dijkstra*-basierten [Dij59] Algorithmus. Dieser berechnet für einen gegebenen Startknoten s für jeden Knoten $v \in V$ die Ankunftszeiten der frühestmöglichen temporalen Pfade unter lokaler Beschränkung. Der von uns entwickelte Algorithmus hat eine polynomielle Laufzeit, welche in $O(c_{\text{perm}} \cdot |E_0| \log(c_{\text{perm}} \cdot |E_0|) + |E_{\text{temp}}| \cdot \log c_{\text{temp}})$ liegt. Dabei ist c_{perm} die Anzahl der Stationen, E_0 die Kantenmenge der Straßen, E_{temp} die Kantenmenge der ÖPNV-Fahrten

In Kapitel 5 verwenden wir den von uns entwickelten Algorithmus aus Kapitel 4 um die Fahrzeiten aus dem Stadtzentrum zu berechnen. Diese nutzen wir anschließend,

³Für die Stadt müssen die entsprechenden GTFS-Daten frei verfügbar sein.

1 Einführung

um die vom Stadtzentrum aus innerhalb von 45 min erreichbaren Gebiete zu vergleichen. Dabei stellen wir fest, dass Rad-Transit eine größere Reichweite als die unimodale ÖPNV-Nutzung hat, so dass innerhalb von 45 min im Durchschnitt fast 5 km weiter gereist werden kann. Damit unsere Ergebnisse möglichst unabhängig vom gewählten Startpunkt sind, führen wir die Experimente anschließend erneut für 1000 zufällig ausgewählte Startpunkte aus der Region Berlin aus. Dadurch erhalten wir über 160.000.000 verschiedene Fahrzeiten und stellen mithilfe statistischer Methoden fest, dass Rad-Transit bezüglich der Zugänglichkeit und durchschnittlichen Reisezeit unimodale ÖPNV-Nutzung übertrifft. Diese Vorteile variieren jedoch je nach Gebiet und gereister Entfernung und wir kommen zu dem Schluss, dass Rad-Transit besonders außerhalb und am Rand der Stadt, wo eine verhältnismäßig schlechte Anbindung besteht, die Fahrzeit wesentlich verkürzen kann. Dort ergibt sich auf Strecken von 8 km Entfernung (Luftlinie) mit 34 min die größte Differenz zwischen den durchschnittlichen Fahrzeiten von Rad-Transit und unimodalem ÖPNV. Innerhalb der Stadt, wo es eine dichte Menge an Stationen gibt und die Anbindungen im wesentlichen sehr gut ist, fallen die Unterschiede entsprechend geringer aus.

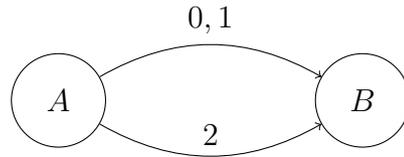


Abbildung 2.1: Der semi-temporale Graph G_2

2 Notation und Grundlegendes

In diesem Kapitel geht es um die formale Definition und Notation von *semi-temporalen* Graphen.

Im folgendem bezeichnet ein Intervall $[a, b]$ die diskrete Menge der natürlichen Zahlen zwischen a und b , also $[a, b] := \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$ für $a, b \in \mathbb{N}$. Als Abkürzung für das Intervall $[1, a]$ kann $[a]$ benutzt werden.

Wir betrachten den temporalen Graphen $G = (V, E, L)$. Da es in unserem Fall Kanten gibt, welche unabhängig von der Zeit bestehen, befassen wir uns mit einer speziellen Unterklasse der temporalen Graphen. Diese zeitlich unabhängigen Kanten, bezeichnen wir als *permanente* Kanten und sie sind wie folgt definiert.

Definition 2.1 (Permanente Kanten). Eine Kante $e = (v, w, t, \lambda) \in E$ ist permanent, wenn es zu jedem Zeitpunkt $t \in [L]$ eine Verbindung von u nach v mit gleicher Reisezeit λ gibt. Permanente Kanten sind also zeitlich invariant. Die Menge der permanenten Kanten ist definiert als $E_{\text{perm}} := \{(u, v, t, \lambda) \in E \mid \forall t' \in [0, L] : (u, v, t', \lambda) \in E\}$. Die restlichen Kanten werden weiterhin als temporale Kanten bezeichnet und sind durch $E_{\text{temp}} := E \setminus E_{\text{perm}}$ definiert.

Temporale Graphen, welche mindestens eine permanente Kante besitzen, bezeichnen wir im folgenden als *semi-temporale* Graphen.

Beispiel 2. In Abbildung 2.1, wird der semi-temporale Graph $G_2 = (\{A, B\}, E_{\text{temp}} \cup E_{\text{perm}}, 2)$, mit $E_{\text{temp}} = \{(A, B, 0, 1)\}$ und $E_{\text{perm}} = \{(A, B, 0, 2), (A, B, 1, 2), (A, B, 2, 2)\}$ dargestellt. Da es in semi-temporalen Graphen L viele Instanzen pro permanente Kanten gibt, werden diese nur für eine Instanz abgebildet und ausschließlich mit der Reisezeit beschriftet.

Da jede permanente Kante L viele Instanzen in E_{perm} besitzt, welche sich jeweils nur in ihrer Abreisezeit unterscheiden, können die permanenten Kanten durch die Menge $E_0 \subseteq E_{\text{perm}}$ beschrieben werden. Die Menge E_0 enthält alle permanenten Kanten mit Abreisezeit 0 und ist definiert als $E_0 := \{(v, w, 0, \lambda) \in E_{\text{perm}}\}$.

2 Notation und Grundlegendes

Der Typ einer Kante e wird als $T(e) \in \{\mathbf{perm}, \mathbf{temp}\}$ notiert. Der Komplementärtyp von T wird als \bar{T} geschrieben, und ist wie folgt definiert:

$$\bar{T} = \begin{cases} \mathbf{perm}, & T = \mathbf{temp} \\ \mathbf{temp}, & T = \mathbf{perm} \end{cases}.$$

Die Menge der Knoten, welche mit einer Kante zu $v \in V$ verbunden sind, bezeichnen wir als *Nachbarschaft* von v . Da die Kanten in temporalen Graphen gerichtet sind, unterscheiden wir zwischen *eingehender* und *ausgehender* Nachbarschaft.

Definition 2.2 (Nachbarschaft). Die eingehende Nachbarschaft, eines Knoten $v \in V$, wird als $\delta^{in}(v) := \{u \mid (u, v, t, \lambda) \in E\}$ notiert. Analog wird die ausgehende Nachbarschaft $\delta^-(u) := \{v \mid (u, v, t, \lambda) \in E\}$ notiert. Zusätzlich lässt sich die Nachbarschaft, wie folgt, nach Kantentyp differenzieren: $\delta_T^+(v) := \{u \mid (u, v, t, \lambda) \in E_T\}$. Das gleiche gilt analog für die ausgehende Nachbarschaft.

Beispiel 3. Wir betrachten den in Abbildung 2.1 abgebildeten semi-temporalen Graphen G_2 . Für den Knoten A ist die ausgehende permanente Nachbarschaft in G_1 $\delta_{\mathbf{perm}}^-(A) = \{B\}$. Für den Knoten B ist die ausgehende permanente Nachbarschaft in G_1 $\delta_{\mathbf{perm}}^-(B) = \emptyset$ die leere Menge.

Alle Knoten mit eingehenden permanenten Kanten und ausgehenden temporalen Kanten werden als *Einstiege* bezeichnet. Analog sind *Ausstiege* Knoten, welche eingehende temporale Kanten und ausgehende permanente Kanten besitzen. Die entsprechenden Mengen $S_+ \subseteq V$ für die Einstiege und $S_- \subseteq V$ für die Ausstiege sind definiert als:

$$\begin{aligned} S_+ &:= \{v \in V \mid \delta_{\mathbf{perm}}^+(v) \neq \emptyset \wedge \delta_{\mathbf{temp}}^-(v) \neq \emptyset\} \\ S_- &:= \{v \in V \mid \delta_{\mathbf{temp}}^+(v) \neq \emptyset \wedge \delta_{\mathbf{perm}}^-(v) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Die Vereinigung der Einstiege und Ausstiege bildet die Menge der Stationen $S = S_+ \cup S_-$.

Tabelle 2.1: Metriken für temporale Pfade

Name	Notation	Formel
Länge	$\text{len}(P)$	$\sum_{i=1}^k \lambda_i$
Abreisezeit	$\text{dep}(P)$	t_1
Ankunftszeit	$\text{arr}(P)$	$t_k + \lambda_k$
Dauer	$\text{dura}(P)$	$\text{arr}(P) - \text{dep}(P)$

Temporale Pfade. Im diesem Abschnitt geht es um temporale Pfade und deren Eigenschaften. Dazu betrachten wir den semi-temporalen Graphen $G = (V, E, L)$. Sei $P = ((v_{i-1}, v_i, t_i, \lambda_i))_{i=1}^k$ ein temporaler Pfad in G . Die Menge der Kanten aus P wird notiert als

$$E(P) := \{(v_{i-1}, v_i, t_i, \lambda_i) \mid i \in [k]\}.$$

Die Menge der Knoten wird beschrieben durch

$$V(P) := \{v_i \mid i \in [0, k]\}.$$

Zudem lassen sich die in Tabelle 2.1 beschriebenen Metriken definieren.

Durch die zwei Kantentypen kann die Länge eines Pfades gesondert nach Typ bemessen werden. Dabei wird die Länge der permanenten beziehungsweise temporalen Kanten summiert. Sei $P = (e_i)_{i=1}^k$ ein temporaler Pfad. Die spezifische Länge vom Typ $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ ist definiert als $\text{len}_T(P) := \sum_{e \in E(P) \cap E_T} \lambda(e)$. Die spezifische Länge vom Typ **perm**, wird folgend auch als permanente Länge bezeichnet und die spezifische Länge vom Typ **temp** als temporale Länge.

Definition 2.3 (Temporaler s - z -Pfad). Ein temporaler s - z -Pfad $P = ((v_{i-1}, v_i, t_i, \lambda_i))_{i=1}^k$ ist ein temporaler Pfad mit $s = v_0$ als Startknoten und $z = v_k$ als Zielknoten. Die Menge aller temporalen s - z -Pfade wird notiert als Π_{s-z} . Start- und Zielknoten werden mit $\text{start}(P) = v_0 = s$ und $\text{dest}(P) = v_k = z$ notiert.

Ein temporaler s - z -Pfad P ist *frühestmöglich*, wenn gilt, dass es keinen temporalen s - z -Pfad gibt, welcher vor P ankommt. Es gilt $\forall P' \in \Pi_{s-z} \text{arr}(P) \leq \text{arr}(P')$. Die Menge der frühestmöglichen temporalen s - z -Pfade ist definiert als $\Phi_{s-z} := \{P \in \Pi_{s-z} \mid \forall P' \in \Pi_{s-z} : \text{arr}(P) \leq \text{arr}(P')\}$. Ein temporaler Pfad P , bei dem alle Kanten denselben Typ haben, ist ein homogener temporaler Pfad. Es gilt $\forall e, e' \in E(P) : T(e) = T(e')$. Da alle Kanten in homogenen temporalen Pfaden den gleichen Typ haben, können wir für diese ebenfalls einen Typ definieren. Dieser entspricht dem Typ der Kanten, also $T(P = (e_i)_{i=1}^k) = T(e_1)$. Ein besonderer homogener temporaler Pfad ist der temporale Null-Pfad P_\emptyset . Der temporale Null-Pfad enthält keine Kanten und hat die Form $P_\emptyset = ()$. Für jeden Knoten $v \in V$ existiert ein temporaler Nullpfad, welcher in v startet und endet. Der temporale Nullpfad ist vom Typ **perm** und hat immer $\text{arr}(P) = \text{len}(P) = \text{len}(P) = \text{dura}(P) = \text{dep}(P) = 0$.

Teilpfade. In diesem Abschnitt geht es um Teilpfade. Ein Teilpfad ist ein temporaler Pfad, welcher vollständig in einem anderen temporalen Pfad enthalten ist.

Definition 2.4 (Teilpfad). Sei $P = (e_i)_{i=1}^k$ ein temporaler s - z -Pfad. Dann ist $P' = (e_i)_{i=a}^b$ ein Teilpfad von P , wenn $1 \leq a \leq b \leq k$. Wir schreiben $P' \subseteq P$. Die Menge aller Teilpfade aus P ist definiert als $\text{sub}(P) := \{(e_i)_{i=a}^b \mid a \in [k], b \in [a, k]\}$.

Da viele dieser Teilpfade untereinander selbst wieder Teilpfade sind betrachten wir eine spezielle Untermenge der Teilpfade. Diese lässt sich aufgrund der beiden Kantentypen, durch *maximal homogene* Teilpfade definieren.

Definition 2.5 (Maximal homogener Teilpfad). Sei $P = (e_i)_{i=1}^k$ ein temporaler Pfad; Dann ist $\text{hom}(P) := \{P' \in \text{sub}(P) \mid \exists T \in \{\text{perm}, \text{temp}\} \forall e \in E(P') T(e) = T\}$ die Menge der homogenen Teilpfade aus P . Da auch in dieser Menge temporale Pfade existieren, welche Teilpfade zueinander sind, beschränken wir uns im folgenden auf die Menge der *maximal homogenen* Teilpfade. Dabei ist der homogene Teilpfad $P' \in \text{hom}(P)$ maximal,

wenn es keinen längeren homogenen Teilpfad $P'' \in \text{hom}(P)$ gibt, welcher P' enthält. Die Menge aller maximal homogenen Teilpfade aus P ist definiert als:

$$\text{hom}_{\max}(P) := \{P' \in \text{hom}(P) \mid \forall P'' \in \text{hom}(P) P' \subseteq P'' \implies P'' = P'\}.$$

Die geordnete Sequenz dieser Menge wird als $\overrightarrow{\text{hom}_{\max}}(P) := (P_i)_{i=1}^h$, mit $h = |\text{hom}_{\max}(P)|$, notiert. Hier gilt für alle $P_j, P_k \in \overrightarrow{\text{hom}_{\max}}(P) : \text{arv}(P_j) \leq \text{dep}(P_k) \iff j < k$.

Diese Darstellung erlaubt eine etwas abstraktere Sicht auf temporale Pfade. Zudem benennen wir zusätzlich den ersten und letzten maximal homogenen Teilpfad wie folgt.

Definition 2.6 (Suffix- / Präfixpfad). Sei P ein temporaler Pfad mit $\overrightarrow{\text{hom}_{\max}}(P) = (P_i)_{i=1}^h$. Der erste temporale Pfad aus $\overrightarrow{\text{hom}_{\max}}(P)$ heißt Präfixpfad und der letzte temporale Pfad aus $\overrightarrow{\text{hom}_{\max}}(P)$ heißt Suffixpfad. Zur Notation wird $\text{pre}(P) := P_1$ und $\text{suf}(P) := P_h$ verwendet.

Neben dem Typ eines temporalen Pfades führen wir zusätzlich Suffix- und Präfixtyp von temporalen Pfaden ein. Der Suffixtyp eines temporalen Pfades P ist der Typ des Suffixpfades von P und definiert als $T_{\text{suf}}(P) := T(\text{suf}(P))$. Die Länge des Suffixpfades von P ist die Suffixlänge und definiert durch $\text{len}_{\text{suf}}(P) := \text{len}(\text{suf}(P))$. Analog zu Suffixtyp und Suffixlänge definieren sich Präfixtyp und Präfixlänge. Der temporale Null-Pfad P_\emptyset hat immer $T_{\text{suf}}(P_\emptyset) = T_{\text{pre}}(P_\emptyset) = \text{perm}$.

Alle Knoten, welche Startknoten eines maximal homogenen Teilpfades sind, werden als *Umstieg* bezeichnet. Die Umstiege zu einem temporalen Pfad P , mit $\overrightarrow{\text{hom}_{\max}}(P) = (P_i)_{i=1}^h$ sind definiert als

$$\text{trans}(P) := (u_i)_{i=1}^h \tag{2.1}$$

$$\forall i \in [h], u_i := \text{start}(P_i). \tag{2.2}$$

Pfade unter Beschränkung. Neben der Frage nach dem frühestmöglichen temporalen Pfad, gibt es oft weitere Kriterien, welche temporale Pfade erfüllen sollen. Die Ankunftszeit beziehungsweise Länge von frühestmöglichen temporalen Pfaden einzuschränken, ist dabei recht trivial. Da diese immer aus kürzeren beziehungsweise früheren Teilpfaden konstruiert werden können, kann hier der kürzeste/früheste unerforschte temporale Pfad als Abbruchbedingung genutzt werden.

Durch die Typisierung der Kanten und die daraus resultierende spezifische Länge gibt es nun zusätzlich die Möglichkeit, die Kanten eines temporalen Pfades gesondert nach Typ zu beschränken. Dabei ist eine Beschränkung b ein Paar aus permanenter Beschränkung b_{perm} und temporaler Beschränkung b_{temp} . Wir unterscheiden zwischen zwei Arten der Beschränkung. Soll die gesamte Länge der Kanten eines temporalen Pfades gesondert nach Typ begrenzt werden, dann sprechen wir von einer *globalen* Beschränkung. Wenn nur maximal homogene Teilpfade innerhalb eines temporalen Pfades beschränkt sind, dann handelt es sich um eine *lokale* Beschränkung.

Definition 2.7 (Pfad unter globaler/lokaler Beschränkung). Sei P ein temporaler Pfad und $b = (b_{\text{perm}}, b_{\text{temp}}) \in [L]^2$ eine Beschränkung. Der temporale Pfad P ist *global* durch b beschränkt, wenn die spezifische Länge der permanenten und temporalen Kanten b nicht überschreitet. Es gilt für beide Typen $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$, dass $\text{len}_T(P) \leq b_T$. Wenn alle maximal homogenen Teilpfade aus P jeweils *global* durch b beschränkt sind, dann ist der temporale Pfad P *lokal* durch b Beschränkt. Es gilt, $\forall P_i \in \overrightarrow{\text{hom}_{\text{max}}}(P) : \text{len}_T(P_i) \leq b_{T(P_i)}$.

3 Globale Beschränkung

Eine globale Beschränkung für temporale Pfade kann in unserem Fall zum Beispiel dann genutzt werden, wenn durch die Verwendung von E-Bikes die fahrbahre Strecke durch die Akkuladung limitiert wird. Allerdings ist bereits die Frage nach der Existenz eines temporalen s - z -Pfades unter globalen Beschränkung NP-vollständig und führt zu folgendem Problem:

GlobALE ERREICHBARKEIT

Eingabe: Ein semi-temporaler Graph $G = (V, E, L)$, ein Startknoten $s \in V$, ein Zielknoten $z \in V$ und eine Beschränkung $b \in [0, L]^2$.

Frage: Gibt es einen temporalen s - z -Pfad unter globaler Beschränkung b ?

Wir zeigen nun formal, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-vollständig ist.

Theorem 3.1. GLOBALE ERREICHBARKEIT ist NP-vollständig.

Um zu zeigen, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-vollständig ist, zeigen wir als erstes, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT in NP liegt. Dazu zeigen wir, dass die Überprüfung, ob ein temporaler s - z -Pfad GLOBALE ERREICHBARKEIT erfüllt, in Polynomialzeit möglich ist.

Lemma 3.2. GLOBALE ERREICHBARKEIT liegt in NP.

Beweis. Sei $G = (V, E, L)$ ein temporaler Graph, $b = (b_{\text{perm}}, b_{\text{temp}})$ eine globale Beschränkung und $P = ((v_{i-1}, v_i, t_i, \lambda_i))_{i=1}^k$ ein temporaler s - z -Pfad in G . Wenn $k > b_{\text{perm}} + b_{\text{temp}}$, dann ist P keine Lösung für GLOBALE ERREICHBARKEIT, da alle Kanten positive Reisezeit haben und demnach eine der beiden Beschränkungen verletzt wird. Ansonsten überprüfe ob P ein gültiger temporaler s - z -Pfad ist und ob $\text{len}_{\text{perm}}(P) \leq b_{\text{perm}}$ und $\text{len}_{\text{temp}}(P) \leq b_{\text{temp}}$. Dies geht in insgesamt $b_{\text{perm}} + b_{\text{temp}}$ Schritten, da lediglich jede Kante aus P einmal betrachtet werden muss. Demnach liegt GLOBALE ERREICHBARKEIT in NP. \square

Nachdem wir gezeigt haben, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT in NP liegt, zeigen wir nun, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-schwer ist. Es erfolgt der Beweis durch eine Polynomialzeitreduktion vom NP-vollständigen PARTITION [GJ79]. Bei PARTITION geht es um die Partitionierung einer Menge positiver natürlicher Zahlen in zwei Mengen, sodass die Summen aus diesen Mengen identisch sind. Sei \mathbb{N}^+ die Menge der natürlichen Zahlen ohne null.

PARTITION

Eingabe: Eine Multimenge $S \subset \mathbb{N}^+$, mit $n = |S|$ natürlichen Zahlen.

Frage: Gibt es eine Zerlegung von S in zwei Teilmengen S_1 und S_2 , sodass $\sum_{x_i \in S_1} x_i = \sum_{x_j \in S_2} x_j$?

3 Globale Beschränkung

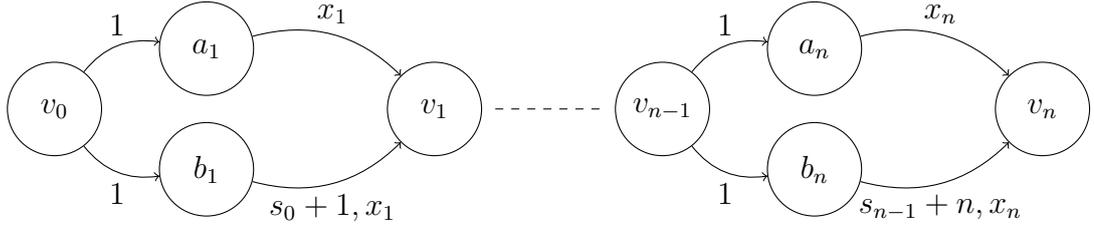


Abbildung 3.1: Der Reduktionsgraph, welcher die Zahlen aus der Menge S verkettet

Für die folgende Reduktion konstruieren wir einen semi-temporalen Graphen, welcher die Form einer Kette hat. Dabei gibt es für jede Zahl $x_i \in S$ einen entsprechenden Knoten v_i in der Kette. Jeder Knoten v_i ist dabei zu seinem Vorgänger mit zwei Kanten verbunden. Die verbindenden Kanten sind jeweils eine temporale und eine permanente Kante, welche beide Reisezeit x_i haben. Da es sich bei den Zahlen aus S um ganze Zahlen handelt, muss die Summe der Mengen S_1 und die Summe der Menge S_2 gleich der Hälfte der Gesamtsumme aus S entsprechen. Wir bezeichnen mit $s_n/2$ die Hälfte der Gesamtsumme. Wenn wir nun nach dem temporalen Pfad vom vordersten zum letzten Knoten suchen und dieser zusätzlich die globale Beschränkung $b = (s_n/2, s_n/2)$ erfüllen soll, dann gibt existiert solch ein temporaler Pfad, genau dann, wenn es eine Lösung zu PARTITION gibt. Da für zwei Knoten $u, v \in V$ die temporale Kante (u, v, t, λ) zu der permanenten Kante $(u, v, 0, \lambda)$ gehört, führen wir pro Zahl $x_i \in S$ zwei zusätzliche Knoten ein, um die Unterscheidung nach Typ zu ermöglichen. Formal zeigen wir folgendes.

Lemma 3.3. GLOBALE ERREICHBARKEIT ist NP-schwer.

Beweis. Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{N}^+$ eine Multimenge aus n natürlichen Zahlen. Die Summe der ersten i Zahlen aus S wird notiert als $s_i = (\sum_{j=1}^i x_j)$. Nun erzeugen wir den semi-temporalen Graph $G = (V, E_{\text{perm}} \cup E_{\text{temp}}, L)$ wie folgt:

1. Für jedes Element $x_i \in S$ werden jeweils die Knoten $a_i, b_i, v_i \in V$ erzeugt.
2. Zusätzlich wird der Knoten v_0 hinzugefügt.
3. Für jedes Element $x_i \in S$ wird eine permanente Kante $(a_i, v_i, 0, x_i) \in E_{\text{perm}}$ und eine temporale Kante $(b_i, v_i, s_{i-1} + i, x_i) \in E_{\text{temp}}$ erzeugt.
4. Zusätzlich werden die Knoten $v_{i-1}, a_i, b_i, i \in [n]$ durch die permanenten Kanten $(v_{i-1}, a_i, 0, 1), (v_{i-1}, b_i, 0, 1)$, verbunden.

Der daraus resultierende Graph hat die in Abbildung 3.1 dargestellte Form.

Im folgenden zeigen wir, dass wenn es in G einen temporalen Pfad P_n von $q = v_0$ nach v_n unter der globalen Beschränkung $b = (\lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor + n, \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor)$ gibt, dass dann eine Zerlegung von S existiert, welche PARTITION erfüllt.

Da zwischen allen Knoten $v_{i-1}, v_i, i \in [n]$, ausschließlich temporale Pfade mit Länge $x_i + 1$

existieren und alle temporalen Pfade P_i , von $q = v_0$ nach v_i , über alle $v_j \in V$, $j \in [i - 1]$ laufen, so gilt $\text{len}(P_i) = \sum_{j=1}^i x_j + 1 = s_i + i$.

Falls s_n ungerade ist, so können unter Einhaltung der Beschränkung b nur temporale Pfade gebildet werden, welche maximal Länge $s_n - 1 + n$ haben. Da jeder temporale Pfad P_n immer Länge $s_n + n$ hat, gibt es unter globaler Beschränkung b keinen solchen temporalen Pfad. Entsprechend gibt es auch keine Zerlegung von S , wenn s_n ungerade ist.

Wenn s_n gerade ist, dann können unter Einhaltung von b , temporale Pfade mit maximaler Länge $s_n + n$ gebildet werden. Dadurch, dass $\text{len}(P_n) = \text{len}_{\text{perm}}(P_n) + \text{len}_{\text{temp}}(P_n) = s_n + n$ gilt und P_n die Beschränkung b , $\text{len}_{\text{perm}}(P_n) \leq \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor + n$ und $\text{len}_{\text{temp}}(P_n) \leq \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor$ erfüllen muss, gilt für alle P_n , $\text{len}_{\text{perm}}(P_n) - n = \text{len}_{\text{temp}}(P_n) = \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor$. Wählt man nun $S_1 = \{\lambda(e) \mid e \in E(P) \cap E_{\text{temp}}\}$ und $S_2 = S \setminus S_1$, gilt $\sum_{x_i \in S_1} x_i = \text{len}_{\text{temp}}(P) = \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor$. Da S_2 aus den restlichen Elementen aus S besteht und s_n gerade ist, gilt $\sum_{x_i \in S_2} x_i = s_n - \sum_{x_i \in S_1} x_i = s_n - \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor$. Dies ist eine Zerlegung von S , welche PARTITION erfüllt, da $\sum_{x_i \in S_2} x_i = \sum_{x_i \in S_1} x_i = \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor$ gilt.

Wir zeigen nun, dass wenn es eine Zerlegung von S in S_1 und S_2 gibt, welche PARTITION erfüllt, dann gibt es in G einen temporalen Pfad $P_n = (e_i)_{i=1}^{2n}$, von v_0 nach v_n , unter der Beschränkung $b = (\lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor + n, \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor)$.

Der temporale Pfad P_n lässt sich aus den permanenten Kanten $e_{2i} = (a_i, v_i, s_{i-1} + i, x_i) \in E_{\text{perm}}$, $x_i \in S_1$, den temporalen Kanten $e_{2i} = (b_i, v_i, s_{i-1} + i, x_i) \in E_{\text{temp}}$, $x_i \in S_2$ und den permanenten Kanten $e_{2i-1} = \begin{cases} (v_{i-1}, a_i, s_{i-1} + i - 1, 1) \in E_{\text{perm}}, & \text{falls } x_i \in S_1, \\ (v_{i-1}, b_i, s_{i-1} + i - 1, 1) \in E_{\text{perm}}, & \text{falls } x_i \in S_2, \end{cases}$ erzeugen.

Sei P_i , $i \in [0, n]$, der Teilpfad von P_n , welcher in q startet und in v_i endet. Zudem sei \tilde{P}_i der Teilpfad von P_i , mit $\text{len}(\tilde{P}_i) = \text{len}(P_i) - 1$, welcher entweder in a_i oder b_i endet und in q startet. Wir zeigen nun per Induktion, dass alle temporalen Pfade P_i , $i \in [0, n]$, Ankunftszeit $s_i + i$ haben.

Induktionsanfang ($i = 0$): Für den temporalen Null-Pfad P_0 ist die Ankunftszeit laut Definition 2.3 gleich null.

Induktionsannahme: Für alle P_{i-1} , $i \in [n]$, gilt $\text{arr}(P_{i-1}) = s_{i-1} + i - 1$.

Induktionsschritt: Nun muss nur für P_i gezeigt werden, dass $\text{arr}(P_i) = s_i + i$ gilt. Laut Induktionsannahme gilt $\text{arr}(P_{i-1}) = s_{i-1} + i - 1$ und da die permanente Kante e_{2i-1} aus v_{i-1} Abreisezeit $s_{i-1} + i - 1 \geq \text{arr}(P_{i-1})$ hat, lässt sich P_{i-1} mit e_{2i-1} zu \tilde{P}_i erweitern. Dadurch ergibt sich für \tilde{P}_i die Ankunftszeit $t(e_{2i-1}) + \lambda(e_{2i-1}) = s_{i-1} + i$. Wenn $x_i \in S_1$ ist, endet \tilde{P}_i in a_i und $e_{2i} = (a_i, v_i, s_{i-1} + i)$. Falls $x_i \in S_2$, endet \tilde{P}_i in b_i und $e_{2i} = (b_i, v_i, s_{i-1} + i)$. In beiden Fällen hat e_{2i} Abreisezeit $s_{i-1} + i \geq \text{arr}(\tilde{P}_i)$, wodurch \tilde{P}_i durch e_{2i} zu P_i erweitert werden kann. Dadurch ist $\text{arr}(P_i) = t(e_{2i}) + \lambda(e_{2i}) = s_{i-1} + i + x_i = s_i + i$.

Da es für jedes $x_i \in S_1$, genau eine temporale Kante $e_{2i} \in E(P_n)$ mit Reisezeit x_i gibt, gilt $\text{len}_{\text{temp}}(P_n) = \sum_{x_i \in S_1} x_i = \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor$. Da der temporale Pfad P_n die Länge $s_n + n$ hat und die Summe aus den spezifische Längen die gesamte Länge ergeben muss, ist $\text{len}_{\text{perm}}(P_n) = \text{len}(P_n) - \text{len}_{\text{temp}}(P_n) = s_n + n - \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{s_n}{2} \rfloor + n$. Dadurch gilt $\text{len}_{\text{perm}}(P_n) \leq b_{\text{perm}}$ und $\text{len}_{\text{temp}}(P_n) \leq b_{\text{temp}}$ wodurch P_n die globale Beschränkung b erfüllt.

Zudem ist die Reduktion in Polynomialzeit, da lediglich einmal über alle n Zahlen aus

3 Globale Beschränkung

S iteriert wird. □

Durch die beiden vorherigen Lemmata können wir nun zeigen, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-vollständig ist.

Beweis von Theorem 3.1. Da Lemma 3.3 besagt, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-schwer ist und laut Lemma 3.2 auch in NP liegt, ist GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-vollständig. □

Da die Reduktion nur semi-temporale Graphen in der Form von Ketten erzeugt, ist die GLOBALE ERREICHBARKEIT bereits auf der Klasse der azyklischen semi-temporalen Graphen mit Knotengrad ≤ 2 NP-schwer. Zudem besteht der folgende Zusammenhang zwischen der globalen Beschränkung und dem temporalen *Multi-objective* Routing. Beim temporalen *Multi-objective* Routing werden temporale Pfade gesucht, welche mehrere Kostenfunktionen optimieren. Da es bei mehr als einer Kostenfunktionen meist keine eindeutige optimale Lösung gibt, können die verschiedenen Kriterien entweder in einer Linearkombination vereint werden, wie zum Beispiel in [Ben+20], oder es werden alle so genannten Pareto-optimalen Lösungen gesucht wie es bei [GBD10] der Fall ist. Pareto-optimale Lösungen sind in diesem Fall temporale Pfade, bei denen keine der Kosten weiter minimiert werden können ohne dabei andere Kosten zu steigern.

Wenn wir nun also len_{perm} und len_{temp} als Kostenfunktionen für das temporale *Multi-objective* Routing benutzen und eine Suche von dem Knoten s starten, dann gilt für jeden Knoten $v \in V$: wenn ein Pareto-optimaler temporaler s - v -Pfad P existiert, für den gilt $\text{len}_{\text{perm}}(P) \leq b_{\text{perm}} \in [L]$ und $\text{len}_{\text{temp}}(P) \leq b_{\text{temp}} \in [L]$, genau dann ist die GLOBALE ERREICHBARKEIT für Startknoten s Zielknoten v und globale Beschränkung $b = (b_{\text{perm}}, b_{\text{temp}})$ erfüllt. Die Gültigkeit geht direkt aus der Definition 2.7 hervor.

Da bereits die Frage nach der Existenz von temporalen s - z -Pfadern unter globaler Beschränkung NP-schwer ist und wir an frühestmöglichen temporalen Pfaden interessiert sind und mehrere Tausend Anfragen durchführen, werden wir in dieser Arbeit nicht weiter auf temporale Pfade unter globaler Beschränkung eingehen.

4 Lokale Beschränkung

Eine lokale Beschränkung für temporale Pfade kann zum Beispiel genutzt werden, wenn die körperliche Kondition des Radfahrenden berücksichtigt werden soll und Radfahrten innerhalb einer Reise eine gewisse Länge nicht überschreiten sollen. Eine weitere Anwendung von lokaler Beschränkung bildet die Nutzung von Leihraddiensten. Einige Anbieter wie zum Beispiel Nextbike [nex] oder StadtRAD [Deu] bieten unbegrenzt viele Freifahrten¹ an, solange diese jeweils nicht länger als 30 Minuten dauern.

Neben der Frage nach der Existenz eines temporalen s - z -Pfades unter lokaler Beschränkung ist für uns die Suche nach frühestmöglichen temporalen Pfaden unter lokaler Beschränkung interessant.

FRÜHESTMÖGLICHE TEMPORALE PFADE UNTER LOKALER BESCHRÄNKUNG

Eingabe: Ein semi-temporaler Graph $G = (V, E, L)$, ein Startknoten $s \in V$ und eine Beschränkung $b \in [0, L]^2$.

Frage: Was ist die Ankunftszeit der frühestmöglichen temporalen s - v -Pfade unter lokaler Beschränkung b , für jeden Knoten $v \in V$?

Hierbei kann es vorkommen, dass ein Knoten, zu dem der frühestmögliche temporale Pfad bereits bekannt ist, erneut erforscht werden muss, um den gesuchten temporalen Pfad zu finden. Das ist dadurch bedingt, dass ein Knoten eventuell zu einem späteren Zeitpunkt mit einer geringeren Suffixlänge erreicht wird, als bei der frühestmöglichen Ankunft.

Beispiel 4. Im in Abbildung 4.1 dargestellten semi-temporalen Graphen G_3 kann der temporale A - D -Pfad, unter lokaler Beschränkung $b = (3, 3)$, nur dann gefunden werden, wenn der Pfad $((A, B, 1, 3)(B, C, 4, 1))$ weiter untersucht wird, obwohl der temporale Pfad $((A, C, 0, 2))$ bereits früher in C ankommt.

In Abschnitt 4.1 entwickeln wir eine Funktion, welche für jeden Zeitpunkt $t \in [0, L]$ die temporalen Pfade unter lokaler Beschränkung mit Ankunftszeit t und kleinstmöglicher Suffixlänge berechnet. In Abschnitt 4.2 entwickeln wir einen Algorithmus, welcher alle Pareto-optimalen temporalen Pfade unter lokaler Beschränkung sucht und diese iterativ erweitert.

¹Es muss eine kostenpflichtige Mitgliedschaft bestehen und es können gegebenenfalls Kosten für das Abstellen des Leihrads anfallen.

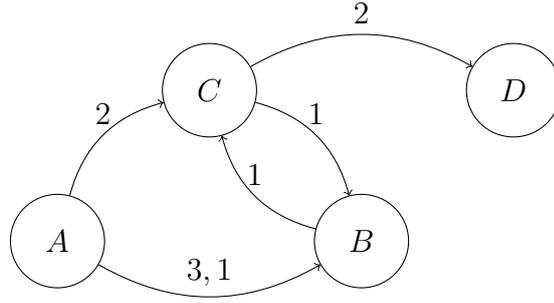


Abbildung 4.1: Der semi-temporale Graph G_3

4.1 Dynamisches Programm

In diesem Abschnitt geht es um die Suche nach frühestmöglichen temporalen Pfaden unter lokaler Beschränkung mithilfe dynamischer Programmierung. Dabei minimieren wir für alle Knoten $v \in V$ zu jedem Zeitpunkt $t \in [L]$ die Suffixlänge der temporalen Pfade nach v .

Gegeben sei ein semi-temporaler Graph $G = (V, E, L)$ und eine lokale Beschränkung $b \in [L]^2$. Sei $F_T(v, t) = d \in [0, b_T]$, falls es einen temporalen s - v -Pfad P mit $\text{arr}(P) \leq t$, Suffixtyp T und Suffixlänge d gibt, welcher die lokale Beschränkung b erfüllt. Ansonsten sei $F_T(v, t) = \infty$. Da der Startknoten s von Anfang an erreicht ist, setzen wir $F_{\text{perm}}(s, 0) = 0$ und $F_{\text{temp}}(s, 0) = \infty$. Für die restlichen Knoten $v \in V \setminus \{s\}$, wird $F_T(v, 0)$ für beide Suffixtypen $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ mit ∞ initialisiert. Danach lässt sich iterativ, für alle Knoten, die kleinstmögliche Suffixlänge errechnen.

Dabei gibt es einen temporalen s - v -Pfad zum Zeitpunkt t , mit Suffixtyp T , Suffixlänge $F_T(v, t)$ und unter Beschränkung b , wenn

- es bereits einen solchen temporalen s - v -Pfad zum Zeitpunkt $t - 1$ gibt, oder
- es eine Kante $e = (u, v, t_e, \lambda_e)$ mit Ankunftszeit $t_e + \lambda_e = t$, Typ T und Reisezeit $\lambda_e \leq b_T$ gibt. Zudem muss zur Abreisezeit t_e ein temporaler s - u -Pfad mit komplementären Suffixtyp \bar{T} existieren oder ein temporaler s - u -Pfad mit gleichem Suffixtyp und Suffixlänge kleiner gleich $b_T - \lambda_e$ existieren.

Somit ergibt sich der Eintrag einer Zelle $F_T(v, t)$ für $v \in V, t \in [L], T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ folgendermaßen:

Definition 4.1. Für den Startknoten $s \in V$ sei $F_{\text{perm}}(s, 0) = 0$ und $F_{\text{temp}}(s, 0) = \infty$ und für alle anderen $v \in V \setminus \{s\}$ sei $F_{\text{perm}}(v, 0) = F_{\text{temp}}(v, 0) = \infty$. Dann sei für alle $v \in V, t \in [L]$ und $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$

$$F_T(v, t) := \min \left\{ \lambda_e \mid (u, v, t_e, \lambda_e) \in E_T, t_e + \lambda_e = t, \lambda_e \leq b_T, F_{\bar{T}}(u, t_e) \neq \infty \right. \\ \left. \cup \{F_T(u, t_e) + \lambda_e \mid (u, v, t_e, \lambda_e) \in E_T, t_e + \lambda_e = t, F_T(u, t_e) + \lambda_e \leq b_T\} \right. \\ \left. \cup \{F_T(v, t - 1)\} \right\}.$$

Wir fahren fort mit dem Korrektheitsbeweis für die Funktion aus Definition 4.1.

Lemma 4.2. *Wenn ein temporaler s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit t , Suffixlänge d und Suffixtyp T existiert, dann ist $F_T(v, t) \leq d$.*

Beweis. Wir zeigen, dass wenn ein temporaler s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit $\text{arr}(P) \leq t$, Suffixlänge d und Suffixtyp $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ existiert, dann ist $F_T(v, t) \leq d$.

Induktionsanfang ($t = 0$): Nur der Startknoten s kann Ankunftszeit 0 haben, da für alle Kanten $\lambda > 0$ gilt. Von s nach s geht nur der temporale Null-Pfad P_\emptyset , dieser hat Suffixlänge 0 und Suffixtyp perm , direkt nach der Initialisierung gilt $F_{\text{perm}}(0, s) = 0$.

Induktionsannahme: Für alle $t' \in [0, L - 1]$, $v \in V$ gilt: $F_T(v, t')$, $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ ist die kleinstmögliche Suffixlänge d von allen temporalen s - v -Pfadern unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit kleiner gleich t' .

Induktionsschritt: Nun muss nur gezeigt werden, dass dies auch für alle $F_T(v, t' + 1)$ gilt. Falls es keinen temporalen s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit t gibt, der die Suffixlänge in v verringert, wird auf den Wert der vorherigen Iteration zugegriffen. Dadurch ist $F(v, t) = F(v, t - 1)$, dies ist laut Induktionsannahme kleinstmöglich. Falls es einen temporalen s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit t gibt und dieser die bisherige Suffixlänge in v verringert, dann steht der entsprechende Wert in $F_T(v, t)$.

Sei P ein temporaler s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit t , welcher Suffixlänge d und Suffixtyp $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ hat. Sei $e = (u, v, t_e, \lambda_e)$ die letzte Kante in P , und P_u , der temporale s - u -Teilpfad von P , mit Ankunftszeit t' , Suffixlänge d' und Suffixtyp $T' \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$.

Wenn $T' = T$, dann ergibt sich für $F_T(v, t) \leq F_T(u, t_e) + \lambda_e \leq d$. Nach Induktionsannahme gilt: $F_T(u, t_e) \leq d'$.

Falls $T' \neq T$, dann ist u ein Umstieg in P . Dadurch ergibt sich die Suffixlänge von P als die Reisezeit der Kante e , also $F_T(v, t) \leq \lambda_e$, da nach Induktionsannahme $F_{T'}(u, t_e) \leq d' \leq \infty$ ist. \square

Das vorherige Lemma 4.2 zeigt, dass für jeden temporalen s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b , Ankunftszeit $t \in [0, L]$ und Suffixtyp T der Eintrag $F_T(v, t)$ die Suffixlänge nach unten beschränkt. Nun zeigen wir, dass für jeden Eintrag $F_T(v, t) \neq \infty$ mit $t \in [0, L]$, $v \in V$ und $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ ein temporaler s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung existiert mit Suffixlänge $F_T(v, t)$, Suffixtyp T , welcher höchstens Ankunftszeit t hat.

Lemma 4.3. *Für alle $v \in V$, $t \in [L]$, $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$, gilt: Wenn $F_T(v, t) \leq \infty$, dann existiert ein temporaler s - v -Pfad P unter lokale Beschränkung b , mit $\text{arr}(P) \leq t$ und Suffixlänge $d \leq F_T(v, t)$*

Beweis. Wenn $F_T(v, t) \neq \infty$, dann gibt es einen temporalen s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b , mit $\text{arr}(P) \leq t$, Suffixlänge $d \leq F_T(v, t)$ und Suffixtyp T .

Induktionsanfang ($t = 0$): Nur für $v = s$ gilt $F_{\text{perm}}(v, 0) \neq \infty$, und da s der Startknoten ist, ist $P = P_\emptyset$ der temporale Null-Pfad, dieser hat Suffixlänge $0 = F_T(s, 0)$ Suffixtyp perm und ist immer innerhalb der lokalen Beschränkung.

4 Lokale Beschränkung

Induktionsannahme: Für alle $t' \in [0, L - 1]$, $v \in V$ gilt: Wenn $F_T(v, t') \neq \infty$, dann existiert ein temporaler s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b , mit $\text{arr}(P) \leq t'$, Suffixlänge $d \leq F_T(v, t')$ und Suffixtyp $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$.

Induktionsschritt: Nun muss nur gezeigt werden, dass dies auch für alle $F_T(v, t) \neq \infty$ gilt. Wenn $F_T(v, t) = F_T(v, t - 1)$, dann gibt es laut Induktionsannahme einen temporalen s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b , mit $\text{arr}(P) \leq t - 1$, Suffixlänge $F_T(v, t - 1)$ und Suffixtyp $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$, da $t - 1 < t$ ist auch $\text{arr}(P) \leq t$. Falls $F_T(v, t) \neq F_T(v, t - 1)$, gibt es eine Kante $e = (u, v, t_e, \lambda_e) \in E_T$, für die $\lambda_e \leq b_T \wedge t_e + \lambda_e = t$ gilt. Zudem ist entweder $F_{\bar{T}}(u, t_e) \neq \infty$ oder $F_T(u, t_e) + \lambda_e \leq b_T$. Wenn $F_{\bar{T}}(u, t_e) \neq \infty$, dann ist $F_T(v, t) = \lambda_e$ und es gibt laut Induktionsannahme einen temporalen s - u -Pfad P_u mit Suffixtyp \bar{T} und Ankunftszeit $\text{arr}(P_u) \leq t_e$, welcher die lokale Beschränkung b einhält. Aus P_u und e lässt sich der temporale Pfad P konstruieren. Dieser hat Suffixlänge $\lambda_e = F_T(v, t) \leq b_T$, da $T_{\text{suf}}(P_u) \neq T(e)$, wodurch u ein Umstieg in P ist. Falls $F_{\bar{T}} = \infty$ jedoch $F_T(u, t_e) + \lambda_e \leq b_T$ ist, dann ist $F_T(v, t) = F_T(u, t_e) + \lambda_e$ und es gibt einen temporalen Pfad P_u mit Suffixtyp T und Ankunftszeit $\text{arr}(P_u) \leq t_e$, welcher die lokale Beschränkung b einhält. Aus P_u und e lässt sich der temporale Pfad P konstruieren. Dieser hat Suffixlänge $F_T(u, t_e) + \lambda_e = F_T(v, t) \leq b_T$, da $T_{\text{suf}}(P_u) = T(e)$, wodurch e den Suffixpfad von P_u erweitert. \square

Um nun die Ankunftszeiten für die frühestmöglichen temporalen s - v -Pfade unter lokaler Beschränkung zu finden, muss $\min\{t \mid F_T(t, v) \neq \infty, T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}\}$ für jeden Knoten $v \in V$ berechnet werden. Dies kann allerdings direkt bei der Berechnung von $F_T(t, v)$ geschehen, indem für jeden Knoten $v \in V$ eine zusätzliche Variable t_v geführt wird. Diese wird initial auf ∞ gesetzt und wenn eine Zelle mit $F_T(t, v) \neq \infty$ und $F_T(t - 1, v) = \infty$ bearbeitet wird für $t \in [L]$, dann wird t_v auf $\min\{t_v, t\}$ gesetzt.

Theorem 4.4. *Die in Definition 4.1 beschriebene Funktion hat, bei nach Ankunftszeit sortierten temporalen Kanten, eine Laufzeit in $O(L \cdot (|V| + |E_0|) + |E_{\text{temp}}|)$ und Speicherbedarf in $O(|V| \cdot L)$.*

Beweis. Es müssen insgesamt $L \cdot |V|$ Einträge für jeweils beide Kantentypen berechnet werden. Dabei dauert ein Eintrag $F_{\text{temp}}(v, t)$, genau $|\{(u, v, t', \lambda') \in E_{\text{temp}} \mid t' + \lambda' = t\}| + 1$ Schritte. Also genau die Anzahl eingehender temporaler Kanten in v zum Zeitpunkt t . Das summiert, über alle Knoten und Ankunftszeiten, ergibt insgesamt $|E_{\text{temp}}| + L \cdot V$ Schritte. Ein Eintrag $F_{\text{perm}}(v, t)$ dauert genau $|\{(u, v, 0, \lambda) \in E_0\}| + 1$ Schritte. Innerhalb einer Zeile werden somit alle permanenten Kanten betrachtet. Über alle Zeitschritte summiert ergibt das insgesamt $L \cdot |E_0|$ Schritte. Insgesamt ergibt sich eine Laufzeit von $O(L \cdot (|V| + |E_0|) + |E_{\text{temp}}|)$. Der Speicherbedarf ist in $O(|V| \cdot L)$, da es insgesamt $2 \cdot |V| \cdot L$ Zellen gibt. \square

Um nicht für jeden Zeitschritt alle permanenten Kanten betrachten zu müssen, schauen wir uns an, wann sich ein Eintrag $F_{\text{perm}}(v, t)$ ändert. Da die Menge, der in v eingehenden permanenten Kanten zum Zeitpunkt t zeitlich invariant ist, gilt: $F_{\text{perm}}(v, t)$ ist kleiner als $F_{\text{perm}}(v, t - 1)$, wenn:

- einer der Einträge $F_{\text{temp}}(u, t - \lambda)$ kleiner als $F_{\text{temp}}(u, t - \lambda - 1) = \infty$ ist, mit $(u, v, t, \lambda) \in E$ und $\lambda \leq b_{\text{perm}}$, oder
- einer der Einträge $F_{\text{perm}}(u, t - \lambda)$ kleiner als $F_{\text{perm}}(u, t - \lambda - 1)$ ist, mit $(u, v, t, \lambda) \in E$ und $\lambda + F_{\text{perm}}(u, t - \lambda) \leq b_{\text{perm}}$ ist.

Somit wird klar, dass sich eine Zelle $F_{\text{perm}}(v, t)$ nur durch Änderungen von Zellen aus der eingehenden permanenten Nachbarschaft von v verändert. In dem folgenden Abschnitt versuchen wir eine entsprechende Lösungsstrategie zu finden, welche diesen Mehraufwand vermeidet.

4.2 Greedy-Strategie

In diesem Abschnitt suchen wir nach einer neuen Strategie um die frühestmöglichen temporalen Pfade unter lokaler Beschränkung zu finden. Im Unterschied zur Lösungsstrategie aus Abschnitt 4.1 werden nun nur noch die lösungsrelevanten temporalen Pfade betrachtet. Dabei definieren wir, welche temporalen Pfade zur Lösung des Problems relevant sind und wie wir solche erkennen können. Dadurch wird das Finden einzelner temporaler Pfade zwar aufwändiger, jedoch können für die Lösung irrelevante temporale Pfade in der Suche ausgelassen werden. Als erstes betrachten wir, wann ein temporaler Pfad für die Lösung irrelevant ist.

Definition 4.5 (Dominanz). Seien P und P' zwei temporale s - v -Pfade unter lokaler Beschränkung b , mit gleichem Suffixtyp. Der temporale Pfad P' wird von P *dominiert*, genau dann wenn $\text{arr}(P) < \text{arr}(P') \wedge \text{len}_{\text{suf}}(P) \leq \text{len}_{\text{suf}}(P')$ oder $\text{arr}(P) = \text{arr}(P') \wedge \text{len}_{\text{suf}}(P) < \text{len}_{\text{suf}}(P')$ gilt.

Ein temporaler s - z -Pfad P ist also immer dann für die Lösung irrelevant, wenn es einen zweiten temporalen s - z -Pfad mit gleichem Suffixtyp gibt, welcher P sowohl in Ankunftszeit als auch in Suffixlänge nicht überschreitet. Wenn es für einen temporalen s - z -Pfad P keinen anderen temporalen s - z -Pfad gibt, welcher P dominiert, dann bezeichnen wir P als *Pareto-optimal*.

In unserem vorherigen Ansatz in Abschnitt 4.1 entspricht also jede Zelle mit $F_T(v, t) = F_T(v, t - 1)$ einem dominierten temporalen Pfad, da der temporale s - v -Pfad mit Ankunftszeit t die gleiche Suffixlänge wie der temporale s - v -Pfad mit Ankunftszeit $t - 1$ hat. Folgendes Lemma 4.6 zeigt, welche temporalen Pfade immer dominiert werden.

Lemma 4.6. Sei $P \neq P_\emptyset$ ein temporaler s - z -Pfad unter lokaler Beschränkung mit Suffixtyp perm . Wir bezeichnen den Suffixpfad von P als P_S und den restlichen temporalen s - v -Pfad von P ohne P_S als P_R . Wenn $\text{arr}(P) > \text{arr}(P_R) + \text{len}(P_S)$ ist oder P_R nicht frühestmöglich unter den temporalen s - v -Pfadern mit gleichem Suffixtyp ist, dann wird P dominiert.

Beweis. Sei $P_S = (e_i = (v_{i-1}, v_i, t_i, \lambda_i))_{i=1}^k$ der Suffixpfad von P und P_R der restliche temporale s - v -Pfad von P ohne P_S . Wir bezeichnen mit $a_i = t_i + \lambda_i$ für $i \in [k - 1]$ die

4 Lokale Beschränkung

Ankunftszeiten innerhalb von P_S und mit $a_0 = \text{arr}(P_R)$ die Ankunftszeit von P_R . Wenn $\text{arr}(P) > \text{arr}(P_R) + \text{len}(P_S)$, dann existiert ein $j \in [k]$ so dass $t_j - a_{j-1} > 0$ ist. Sei $j \in [k]$, sodass $t_j - a_{j-1} > 0$. Da alle Kanten in P_S permanente Kanten sind, können wir die Kanten e_i mit $i \geq j$ um $o = t_j - a_{j-1}$ verschieben. Wir erhalten den temporalen

Pfad $P'_S = ((v_{i-1}, v_i, t'_i, \lambda_i))_{i=1}^k$, wobei $t'_i := \begin{cases} t_i, & \text{falls } i < b, \\ t_i - o, & \text{sonst,} \end{cases}$ ist. Aus P_R und P'_S lässt

sich der temporale Pfad P' konstruieren, dieser hat die gleiche Suffixlänge wie P und Ankunftszeit $\text{arr}(P) - o$. Dementsprechend wird P von P' dominiert.

Falls P_R nicht frühestmöglich ist unter den temporalen s - v -Pfaden mit gleichem Suffixtyp, dann sei P'_R der frühestmögliche temporale s - v -Pfad mit gleichem Suffixtyp wie P_R . Aus P'_R und P_S lässt sich der temporale s - z -Pfad P' konstruieren, welcher die gleiche Ankunftszeit und Suffixlänge wie P hat. Da $\text{arr}(P'_R) < \text{arr}(P_R)$ ist, gilt, dass $\text{arr}(P') > \text{arr}(P'_R) + \text{len}(P_S)$ und demnach P und P' dominiert werden. \square

In Algorithmus 1 werden nun nicht mehr wie in Abschnitt 4.1 alle temporalen Pfade betrachtet, sondern nur noch die temporalen Pfade, welche Pareto-optimal sind. Die zu erforschenden Pareto-optimalen temporalen Pfade mit Suffixtyp `perm` werden dabei nach aufsteigender Ankunftszeit in einer Vorrangswarteschlange Q sortiert. Gleichzeitig werden die temporalen Kanten nach aufsteigender Ankunftszeit bearbeitet, wodurch die temporalen Pfade mit Suffixtyp `temp` erforscht werden.

Wenn ein Pareto-optimaler temporaler s - v -Pfad P mit Suffixtyp `perm`, Suffixlänge d und Ankunftszeit a gefunden wurde, dann wird für jede aus dem Knoten v ausgehende permanente Kante e mit Abreisezeit a ein Paar (e, d) in die Vorrangswarteschlange Q eingefügt. Wird ein Paar (e, d) aus Q bearbeitet, dann wird mit der Funktion `UPDATE` überprüft, ob der aus P und e konstruierte temporale Pfad dominiert ist. Wenn eine temporale Kante $e = (u, v, t, \lambda)$ bearbeitet wird, wird der temporale s - u -Pfad P gesucht, welcher zusammen mit der Kante e erweitert die kleinstmögliche Suffixlänge hat. Anschließend wird mit der Funktion `UPDATE` überprüft, ob der aus P und e konstruierte temporale Pfad dominiert wird. Wenn ein temporaler s - z -Pfad P mit Suffixtyp `temp` und Ankunftszeit a Pareto-optimal und frühestmöglich ist, dann wird für jede aus dem Knoten z ausgehende permanente Kante e mit Abreisezeit a ein Paar $(e, 0)$ in die Vorrangswarteschlange Q eingefügt.

Begonnen wird mit dem temporalen Null-Pfad im Startknoten; da dieser nie dominiert wird und immer die kleinstmögliche Ankunftszeit hat, werden bei der Initialisierung alle vom Startknoten s ausgehenden permanenten Kanten e als Paar $(e, 0)$ in Q eingefügt.

Alle Pareto-optimalen temporalen s - z -Pfaden mit Ankunftszeit a , Suffixtyp T und Suffixlänge d , werden als Paar (a, d) sortiert nach Ankunftszeit in $q_T[z]$ gespeichert.

Theorem 4.7. *Nach der Ausführung von Algorithmus 1 gilt: Es gibt einen Pareto-optimalen temporalen s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit a , Suffixlänge d und Suffixtyp T , genau dann wenn es ein Paar $(a, d) \in q_T[v]$ gibt.*

Der Beweis erfolgt durch die beiden folgenden Lemmata, welche jeweils eine der beiden Implikationen beweisen. Alle Zeilenangaben beziehen sich dabei auf Algorithmus 1 sofern es nicht weiter angegeben wird.

Algorithmus 1 Frühestmögliche temporale Pfade unter lokaler Beschränkung

Input: Ein temporaler Graph $G = (V, E_{\text{perm}} \cup E_{\text{temp}}, L)$, wobei E_{temp} nach aufsteigender Ankunftszeit sortiert ist. Zudem ein Startknoten $s \in V$ und eine Beschränkung $b = (b_{\text{perm}}, b_{\text{temp}}) \in [L]^2$

Output: Für jeden Knoten $v \in V$, die Listen $q_{\text{perm}}[v]$ und $q_{\text{temp}}[v]$. \triangleright Für alle $v \in V$ und $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ enthält die Liste $q_T[v]$ alle Paare aus Ankunftszeit und Suffixlänge für jeden Pareto-optimalen temporalen s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b .

```

1:  $q_{\text{perm}}[s] \leftarrow \{(0, 0)\}$ 
2:  $q_{\text{temp}}[s], q_{\text{temp}}[v], q_{\text{perm}}[v] \leftarrow \emptyset$  für alle  $v \in V \setminus \{s\}$   $\triangleright Q$  enthält Paare der Form
   ( $e = (u, v, t, \lambda), d$ )  $\in E_{\text{perm}} \times [0, b_{\text{perm}}]$ , nach aufsteigendem  $t + \lambda$  sortiert. Bei gleichem
    $t + \lambda$  wird nach aufsteigendem  $d + \lambda$  sortiert.
3: for  $(u, v, 0, \lambda) \in E_0 \mid u = s$  do
4:   Füge  $((u, v, 0, \lambda), 0)$  in  $Q$  ein
5: while  $Q \neq \emptyset \vee E_{\text{temp}} \neq \emptyset$  do
6:    $t_{\text{perm}} \leftarrow \min\{t + \lambda \mid ((u, v, t, \lambda), d_u) \in Q\} \cup \{\infty\}$ 
7:    $t_{\text{temp}} \leftarrow \min\{t + \lambda \mid (u, v, t, \lambda) \in E_{\text{temp}}\} \cup \{\infty\}$ 
8:   if  $t_{\text{perm}} > L \wedge t_{\text{temp}} > L$  then return  $(q_{\text{perm}}, q_{\text{temp}})$ 
9:   if  $t_{\text{perm}} < t_{\text{temp}}$  then
10:      $T \leftarrow \text{perm}$ 
11:     Sei  $(e = (u, v, t, \lambda), d_u)$  das erste Element aus  $Q$ 
12:     Entferne  $(e, d_u)$  aus  $Q$ 
13:   else
14:      $T \leftarrow \text{temp}$ 
15:     Sei  $e = (u, v, t, \lambda)$  die erste Kante aus  $E_{\text{temp}}$ , mit kleinstmöglichem  $t + \lambda$ 
16:      $E_{\text{temp}} \leftarrow E_{\text{temp}} \setminus \{e\}$ 
17:     if  $\min\{a \mid (a, d) \in q_{\text{perm}}[u]\} \leq t$  then
18:        $d_u \leftarrow 0$ 
19:     else if  $\min\{a \mid (a, d) \in q_{\text{temp}}[u]\} \leq t$  then
20:       Sei  $(a_u, d_u) \in q_{\text{temp}}[u]$ , sodass  $a_u \leq t \wedge \forall (a, d) \in q_{\text{temp}}[u] : d_u \leq d \vee a > t$ 
21:     else
22:       Gehe zu Zeile 5
23:    $d \leftarrow d_u + \lambda$ 
24:    $a \leftarrow t + \lambda$ 
25:   if UPDATE( $v, a, d, q_T$ ) then
26:     if  $T = \text{temp}$  then
27:        $d \leftarrow 0$ 
28:     for  $(v, w, a, \lambda') \in E_{\text{perm}}$  do
29:       Füge  $((v, w, a, \lambda'), d)$  in  $Q$  ein
return  $(q_{\text{perm}}, q_{\text{temp}})$ 

```

Algorithmus 2 Update

Input: Ein Knoten v , eine Ankunftszeit a und Suffixlänge d zu einem entsprechendem temporalen s - v -Pfad mit Suffixtyp T , sowie die Liste der Pareto-optimalen temporalen Pfaden q_T mit Suffixtyp T

Output: *True* wenn der temporale s - v -Pfad um die ausgehenden permanenten Kanten von v erweitert werden soll, sonst *False*.

```

1: function UPDATE( $v, a, d, q_T$ )
2:   if  $d > b_T$  then
3:     return False
4:   if  $q_T[v]$  ist leer then
5:     Füge  $(a, d)$  am Ende von  $q_T[v]$  ein
6:   else
7:     Sei  $(a', d')$  das letzte Element aus  $q_T[v]$ , sodass  $\forall (a'', d'') \in q_T[v] : a'' \leq a'$ 
8:     if  $d' \leq d$  then
9:       return False
10:    else if  $a' = a$  then
11:      Entferne  $(a', d')$  aus  $q_T[v]$ 
12:      Füge  $(a, d)$  am Ende von  $q_T[v]$  ein
13:    if  $T = \text{temp}$  then
14:      return False
15:    return True

```

▷ Siehe Lemma 4.6

Lemma 4.8. *Nach der Ausführung von Algorithmus 1 gilt für alle $v \in V$: Wenn ein Paar $(a, d) \in q_T[v]$ mit $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ existiert, dann gibt es einen Pareto-optimalen temporalen s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit a , Suffixlänge d und Suffixtyp T .*

Beweis. Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten und $(a, d) \in q_T[v]$ mit $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$. Es folgt nun der Beweis per Induktion über a .

Induktionsanfang $a = 0$: Nur $q_{\text{perm}}[s]$ enthält durch die Initialisierung das einzige Paar $(0, 0)$ mit $a = 0$, da UPDATE immer mit Ankunftszeiten $a' = t + \lambda > 0$ aufgerufen wird, wobei $t \in [0, L]$ und $\lambda > 0$ gilt. Von s nach s geht nur der temporale Null-Pfad P_\emptyset mit Suffixtyp perm , dieser ist immer innerhalb der lokalen Begrenzung b , hat Ankunftszeit 0, Suffixlänge 0 und ist immer Pareto-optimal.

Induktionsannahme: Sei $t \in [0, L - 1]$. Für alle $v \in V$ gilt: wenn ein Paar $(a, d) \in q_T[v]$ mit $a \leq t$ und $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ existiert, dann gibt es einen temporalen s - v -Pfad P unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit a , Suffixlänge d und Suffixtyp T .

Induktionsschritt: Es bleibt zu zeigen, dass dies auch für $t + 1$ gilt. Sei $(a, d) \in q_T[v]$ mit $a = t + 1$. Dann muss UPDATE(v, a, d, q_T) in Zeile 25 aufgerufen worden sein, da UPDATE als einzige Funktion in q_T schreibt. Zudem muss $d \leq b_T$ gelten, da sonst die Bedingung in UPDATE Zeile 2 verletzt worden wäre. Aufgrund der zwei Belegungen des Suffixtypen T , gehen wir per Fallunterscheidung vor.

1. Fall: $(a, d) \in q_{\text{temp}}[v]$. Wenn $(a, d) \in q_{\text{temp}}[v]$, dann muss es eine temporale Kante $e = (u, v, t_e, \lambda_e) \in E_{\text{temp}}$ geben, mit $t_e + \lambda_e = a$, welche den Aufruf von $\text{UPDATE}(v, a, d = d_u + \lambda_e, q_{\text{temp}})$ verursacht hat. Außerdem gilt entweder $\min\{a' \mid (a', d') \in q_{\text{perm}}[u]\} \leq t_e$ oder $\min\{a' \mid (a', d') \in q_{\text{temp}}[u]\} \leq t_e$, da sonst in Zeile 22 abgebrochen worden wäre.

Fall 1.1: $d_u = 0$. Wenn $d_u = 0$, dann muss $\min\{a' \mid (a', d') \in q_{\text{perm}}[u]\} \leq t_e$ gelten, da sonst d_u in Zeile 20 auf die Suffixlänge eines temporalen Pfades mit Suffixtyp **temp** gesetzt worden wäre. Zudem gibt es laut Induktionsannahme, weil $\min\{a' \mid (a', d') \in q_{\text{perm}}[u]\} \leq t_e \leq t$ ist, dass ein temporaler s - u -Pfad existiert mit Suffixtyp **perm**, welcher höchstens Ankunftszeit t_e hat. Dieser lässt sich zusammen mit e zu einem temporalen s - v -Pfad mit Suffixtyp **temp** erweitern, welcher Ankunftszeit a und Suffixlänge $d = \lambda_e$ hat. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1.2: $d_u \neq 0$. Wenn $d_u \neq 0$, dann muss $\min\{a' \mid (a', d') \in q_{\text{perm}}[u]\} > t_e$ gelten, da sonst d_u in Zeile 18 auf 0 gesetzt worden wäre. Dementsprechend gilt $\min\{a' \mid (a', d') \in q_{\text{temp}}[u]\} \leq t_e$ und in Zeile 20 wurde das Paar (a_u, d_u) mit kleinstmöglichem d_u aus allen Paaren in $\{(a', d') \in q_{\text{temp}}[u] \mid a' \leq t_e\}$ ausgewählt. Da $a_u \leq t_e \leq t$ gilt laut Induktionsannahme, dass es einen temporalen s - u -Pfad mit Suffixtyp **temp** gibt, welcher Ankunftszeit a_u und Suffixlänge d_u hat. Dieser lässt sich zusammen mit e zu einem temporalen s - v -Pfad mit Suffixtyp **temp** erweitern, hat Ankunftszeit a und Suffixlänge $d = d_u + \lambda_e$.

2. Fall: $(a, d) \in q_{\text{perm}}[v]$. Wenn $(a, d) \in q_{\text{perm}}[v]$, dann muss es ein Paar aus permanenter Kante $e = (u, v, t_e, \lambda_e)$ und Suffixlänge d_u in Q geben mit $t_e + \lambda_e = a$ und $d_u + \lambda_e = d$, da ein Aufruf von $\text{UPDATE}(v, a, d, q_{\text{perm}})$ nur durch ein Element aus Q verursacht werden kann. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 2.1: $d_u = 0$. Wenn $d_u = 0$ und $t_e = 0$, dann ist $u = s$ und e wurde bei der Initialisierung in Zeile 4 in Q eingefügt, in diesem Fall ist $P = (e)$ mit Ankunftszeit a und Suffixlänge $d = \lambda_e$. Wenn $t_e > 0$, dann muss es ein Paar (a', d') geben mit $a = t_e$, sodass beim Einfügen von (a', d') in $q_{\text{temp}}[u]$ die Bedingung in UPDATE Zeile 4 erfüllt wurde, da sonst durch Bedingung in UPDATE Zeile 13 *False* zurückgegeben worden wäre. Dadurch wurde die Bedingung in Zeile 27 erfüllt und d_u wurde auf 0 zurückgesetzt. Zudem gibt es laut Induktionsannahme, da ein Paar $(a' = t_e, d') \in q_{\text{temp}}[u]$ existiert und $t_e \leq t$ ist, einen temporalen s - u -Pfad mit Suffixtyp **temp** und Ankunftszeit $a' = t_e$. Dieser lässt sich zusammen mit e zu einem temporalen s - v -Pfad mit Suffixtyp **perm** erweitern, welcher Ankunftszeit a und Suffixlänge $d = \lambda_e$ hat.

Fall 2.2: $d_u \neq 0$. Wenn $d_u \neq 0$, dann muss in Zeile 25 $\text{UPDATE}(u, t_e, d_u, q_{\text{perm}})$ *True* zurückgegeben haben, da ansonsten das Paar (e, d_u) nicht in Q wäre. Dementsprechend muss es das Paar (t_e, d_u) in $q_{\text{perm}}[u]$ geben, da UPDATE nur nach dem Einfügen eines Paares *True* zurückgibt. Da $t_e \leq t$ ist, gibt es laut Induktionsannahme einen temporalen s - u -Pfad mit Suffixtyp **perm**, Suffixlänge d_u und Ankunftszeit t_e . Dieser lässt sich zusammen mit e zu einem temporalen s - v -Pfad mit Suffixtyp **perm** erweitern, welcher Ankunftszeit $a = t_e + \lambda_e$ und Suffixlänge $d = d_u + \lambda_e$ hat.

Nun ist noch zu zeigen, dass für alle $v \in V$ und $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ alle Paare $(a, d) \in q_T[v]$ von Pareto-optimalen temporalen Pfaden sind. Da UPDATE mit monoton steigenden Ankunftszeiten aufgerufen wird, reicht es aus, immer nur das letzte Element aus $q_T[v]$ zu vergleichen. Sei P ein temporaler s - v -Pfad mit Ankunftszeit a und Suffixlänge d .

4 Lokale Beschränkung

Sei (a', d') das letzte Element aus $q_T[v]$, beim Einfügen von (a, d) . Falls $a' \leq a$ und $d' \leq d$, dann gibt es einen temporalen s - v -Pfad mit Ankunftszeit a' und Suffixlänge d' , welcher den temporalen Pfad P dominiert. Dementsprechend wird in UPDATE Zeile 9 abgebrochen. Wenn $d < d'$ und $a = a'$, dann wird der zu dem Paar (a', d') zugehörige temporale Pfad von P dominiert und das Paar (a', d') wird in UPDATE Zeile 11 aus $q_T[v]$ entfernt. \square

Nach dem wir nun wissen, dass jedes Paar $(a, d) \in q_T[v]$ mit $v \in V$ und $T \in \{\text{perm}, \text{temp}\}$ zu einem Pareto-optimalen temporalen s - z -Pfad mit Suffixtyp T gehört, stellen wir folgendes über die Funktion UPDATE fest.

Beobachtung 4.9. *Sei P ein Pareto-optimaler temporaler s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung $b = (b_{\text{perm}}, b_{\text{temp}})$ mit Ankunftszeit a , Suffixlänge d und Suffixtyp T . Nach dem Aufruf von $\text{UPDATE}(v, a, d, q_T)$ existiert ein Paar $(a, d) \in q_T[v]$.*

Beweis. Da P unter lokaler Beschränkung b ist, gilt $d \leq b_T$, dadurch wird in UPDATE Zeile 2 nicht abgebrochen.

Wenn $q_T[v]$ leer ist, dann wird das Paar (a, d) direkt in Update Zeile 5 in $q_T[v]$ eingefügt. Falls $q_T[v]$ nicht leer ist, dann sei (a', d') das letzte Paar aus $q_T[v]$. Da UPDATE mit monoton steigenden Ankunftszeit aufgerufen wird, gilt $a' \leq a$. Laut Lemma 4.8 gibt es also einen temporalen s - v -Pfad P' unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit $a' \leq a$, Suffixtyp T und Suffixlänge d' . Wenn $d' \leq d$, dann muss $a = a'$ und $d = d'$ gelten, da sonst P von P' dominiert wird. Dementsprechend ist das Paar (a, d) bereits in $q_T[v]$. Wenn $d' < d$, dann wird das Paar (a, d) in UPDATE Zeile 12 in $q_T[v]$ eingefügt. \square

Mit der Beobachtung 4.9 können wir nun zeigen, dass zu jedem Pareto-optimalen temporalen s - v -Pfad P ein entsprechendes Paar in der Liste $q_T[v]$ existiert, wobei T der Suffixtyp von P ist.

Lemma 4.10. *Nach der Ausführung von Algorithmus 1 gilt für alle Pareto-optimalen temporalen s - v -Pfade P unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit a , Suffixlänge d und Suffixtyp T , dass ein Paar $(a, d) \in q_T[v]$ existiert.*

Beweis. Sei P ein Pareto-optimaler temporaler s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b , mit Ankunftszeit a und Suffixlänge d . Es erfolgt nun der Beweis per Induktion über die Ankunftszeit von P .

Induktionsanfang $a = 0$: Nur der temporale Null-Pfad P_\emptyset hat Ankunftszeit 0. In diesem Fall ist $s = v$. Zudem ist der temporale Null-Pfad immer innerhalb der Begrenzung b , hat Suffixlänge 0 und Suffixtyp perm . Direkt nach der Initialisierung existiert das Paar $(0, 0) \in q_{\text{perm}}[s]$.

Induktionsannahme: Sei $t \in [0, L - 1]$. Für alle Pareto-optimalen temporalen s - v -Pfade P unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit $a \leq t$, Suffixlänge d und Suffixtyp T , gibt es ein Paar $(a, d) \in q_T[v]$.

Induktionsschritt: Es gilt zu zeigen, dass dies auch für temporale Pfade mit $a = t + 1$ gilt.

Sei $P = (e_i)_{i=1}^k$ ein Pareto-optimaler temporaler s - v -Pfad unter lokaler Beschränkung b mit Ankunftszeit $a = t + 1$, Suffixlänge d und Suffixtyp T . Wir bezeichnen mit $e = e_k = (u, v, t_e, \lambda_e)$ die letzte Kante aus P und mit $P' = (e_i)_{i=1}^{k-1}$ den Teilpfad aus P ohne e . Da $\text{arr}(P') \leq t$ ist, gilt laut Induktionsannahme, dass es ein Paar $(a', d') \in q_{T'}[u]$ gibt, mit $a' = \text{arr}(P')$ und $d' = \text{len}_{\text{suf}}(P')$ wobei T' der Suffixtyp von P' ist. Durch die Beobachtung 4.9 reicht es zu zeigen, dass $\text{UPDATE}(v, a, d, q_T)$ aufgerufen wird, damit $(a, d) \in q_T[v]$ gilt. Wir gehen per Fallunterscheidung über T und T' vor.

1. Fall: $T = \text{perm}, T' = \text{temp}$. Wenn e eine permanente Kante ist und temp der Suffixtyp von P' ist, dann ist u ein Umstieg in P wodurch P Suffixlänge λ_e hat. Dementsprechend muss P' Ankunftszeit t_e haben und frühestmöglich unter den temporalen s - u -Pfadern mit Suffixtyp temp sein, da sonst Lemma 4.6 verletzt wird. Da der Pfad P' frühestmöglich unter den temporalen s - u -Pfadern mit Suffixtyp temp ist, muss bei dem Einfügen von $(a', d') \in q_{\text{temp}}[u]$ die Liste $q_{\text{perm}}[u]$ leer gewesen sein, wodurch die Bedingung in UPDATE Zeile 4 erfüllt worden ist und UPDATE *True* zurückgegeben hat. Dementsprechend wird danach in Zeile 29 das Paar $(e = (u, v, t_e, \lambda_e), 0)$ in Q eingefügt. In einer späteren Iteration, wenn $(e, 0)$ am Anfang von Q steht, wird $\text{UPDATE}(v, a = t_e + \lambda_e, d = \lambda_e, q_{\text{perm}})$ in Zeile 25 aufgerufen. Dadurch wird das entsprechende Paar (a, d) in $q_{\text{perm}}[v]$ eingefügt.

2. Fall: $T = \text{perm}, T' = \text{perm}$. Wenn e eine permanente Kante ist und perm der Suffixtyp von P' ist, dann ist die Suffixlänge von P die Summe aus der Suffixlänge von P' und λ_e . Zudem wurde nach dem Einfügen von dem Paar $(a' = t_e, d') \in q_{\text{perm}}[u]$ ebenfalls das Paar $(e = (u, v, t_e, \lambda_e), d')$ in Zeile 29 in Q eingefügt. Dies gilt auch für $t_e = 0$, da dann $u = s$ und $P' = P_\emptyset = ()$ gilt und bei der Initialisierung direkt nach dem Einfügen von $(0, 0)$ in $q_{\text{perm}}[s]$ in Zeile 4 das Paar $(u, v, 0, \lambda_e)$ in Q eingefügt wird. In einer späteren Iteration, wenn (e, d') am Anfang von Q steht, wird $\text{UPDATE}(v, a = t_e + \lambda_e, d = d' + \lambda_e, q_{\text{perm}})$ in Zeile 25 aufgerufen. Dadurch wird das entsprechende Paar (a, d) in $q_{\text{perm}}[v]$ eingefügt wird.

3. Fall: $T = \text{temp}, T' = \text{perm}$. Falls e eine temporale Kante ist und perm der Suffixtyp von P' ist, dann ist u ein Umstieg in P wodurch P Suffixlänge λ_e hat. Zudem wird bei der Bearbeitung von e die Bedingung in Zeile 17 erfüllt. Anschließend wird $\text{UPDATE}(v, a = t_e + \lambda_e, d = \lambda_e, q_{\text{temp}})$ in Zeile 25 aufgerufen, wodurch das entsprechende Paar (a, d) in $q_{\text{temp}}[v]$ eingefügt wird.

4. Fall: $T = \text{temp}, T' = \text{temp}$. Wenn e eine temporale Kante ist und temp der Suffixtyp von P' ist, dann ist die Suffixlänge von P die Summe aus der Suffixlänge von P' und λ_e . Zudem muss P' die kleinstmögliche Suffixlänge unter allen temporalen s - u -Pfadern, mit Ankunftszeit kleiner gleich t_e und Suffixtyp temp , haben, da es sonst einen temporalen Pfad gibt, welcher P dominiert. Dementsprechend wird in Zeile 19 das Paar (a', d') ausgewählt und es wird $\text{UPDATE}(v, a = t_e + \lambda_e, d = d' + \lambda_e, q_{\text{temp}})$ in Zeile 25 aufgerufen. Dadurch wird das entsprechende Paar (a, d) in $q_{\text{temp}}[v]$ eingefügt. \square

Beweis von Theorem 4.7. Aufgrund von Lemma 4.8 und Lemma 4.10 gilt: Es existiert ein Pareto-optimaler temporaler s - v -Pfad P mit Suffixtyp T unter Beschränkung b genau dann, wenn ein Paar $(\text{arr}(P), \text{len}_{\text{suf}}(P)) \in q_T[v]$ existiert. \square

Um die Ankunftszeit der frühestmöglichen temporalen Pfade zu erhalten, muss man

4 Lokale Beschränkung

für einen Knoten $v \in V$ das Minimum der beiden Listen $q_{\text{perm}}[v]$ und $q_{\text{temp}}[v]$ berechnen. Da beide Listen sortiert sind, geht dies in konstanter Zeit.

Als nächstes befassen wir uns mit dem Laufzeitverhalten von Algorithmus 1. Da es oftmals mehrere temporale Pfade mit gleicher Ankunftszeit, Suffixlänge und Suffixtyp gibt, führen wir folgende Äquivalenzrelation ein.

Definition 4.11 (Äquivalenz). Zwei temporale s - v -Pfade P und P' sind äquivalent, genau dann wenn beide die gleiche Ankunftszeit, Suffixlänge und Suffixtyp haben. Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim \subset \Pi_{s-z} \times \Pi_{s-z}$, für die gilt:

$$P \sim P' \iff \text{arr}(P) = \text{arr}(P') \wedge \text{len}_{\text{suf}}(P) = \text{len}_{\text{suf}}(P') \wedge T_{\text{suf}}(P) = T_{\text{suf}}(P')$$

Wenn wir nun zwei temporale s - z -Pfade P und P' betrachten, dann lässt sich folgender Zusammenhang erkennen: Sei Π_{s-z}^b die Menge der temporalen s - z -Pfade unter lokaler Beschränkung b . Für die beiden \sim -Äquivalenzklassen $[P]_{\sim}$ und $[P']_{\sim}$ auf der Menge Π_{s-z}^b gilt, wenn P' durch P dominiert wird, dann werden alle temporalen s - z -Pfade aus $[P']_{\sim}$ durch jeden temporalen s - z -Pfad aus $[P]_{\sim}$ dominiert. Wir schreiben $[P]_{\sim}$ dominiert $[P']_{\sim}$.

Um nun die Laufzeit von Algorithmus 1 abzuschätzen, schätzen wir als Erstes, wie viele Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklassen es gibt. Da die Anzahl der Pareto-optimalen \sim -Äquivalenzklassen vom Suffixtyp abhängen, betrachten wir diese gesondert nach Suffixtyp. Wir beginnen mit der Anzahl der Pareto-optimalen \sim -Äquivalenzklassen auf der Menge der temporalen s - z -Pfade mit Suffixtyp perm .

Lemma 4.12. Sei $\Pi_{s-z}^{b, \text{perm}}$ die Menge der temporalen s - z -Pfade unter lokaler Beschränkung $b = (b_{\text{perm}}, b_{\text{temp}})$ mit Suffixtyp perm . Es gibt höchstens $c_{\text{perm}} = \min\{b_{\text{perm}}, |S_{\text{out}}| + 1\}$ \sim -Äquivalenzklassen auf $\Pi_{s-z}^{b, \text{perm}}$, welche Pareto-optimal sind.

Beweis. Seien P und P' zwei Pareto-optimale temporale s - z -Pfade mit Suffixtyp perm , welche u als letzten Umstieg haben. Wir zeigen, dass P und P' in der gleichen \sim -Äquivalenzklasse sind. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $\text{arr}(P) = \text{arr}(P')$. In diesem Fall muss die Suffixlänge der beiden temporalen Pfade gleich sein, da sonst einer der beiden temporalen Pfade dominiert wird. Dementsprechend sind P und P' in der gleichen \sim -Äquivalenzklasse.

2. Fall: $\text{arr}(P) \neq \text{arr}(P')$. Sei P_S der Suffixpfad von P und P_R der restliche temporale Pfad aus P ohne P_S . Entsprechend ist P'_S der Suffixpfad von P' und P'_R der restliche temporale Pfad aus P' ohne P'_S . Sei P' der temporale Pfad mit späterer Ankunftszeit, dementsprechend muss $\text{len}(P'_S) < \text{len}(P_S)$ sein, da P' sonst von P dominiert wird. Laut Lemma 4.6 gilt, dass $\text{arr}(P'_R) + \text{len}(P'_S) > \text{arr}(P_R) + \text{len}(P_S)$ ist. Dementsprechend ist $\text{arr}(P_R) < \text{arr}(P'_R)$ und wir können aus P_R und P'_S den temporalen Pfad P'' konstruieren. Der temporale Pfad P'' erfüllt jedoch nicht mehr die Bedingung $\text{arr}(P'') = \text{arr}(P_R) + \text{len}(P'_S)$ und wird demnach laut Lemma 4.6 dominiert. Da P'' und P' den gleichen Suffixpfad haben und demnach in der gleichen \sim -Äquivalenzklasse sind, wird auch P' dominiert. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass P' Pareto-optimal ist.

Da bei allen temporalen s - z -Pfadern mit Suffixtyp \mathbf{perm} der letzte Umstieg u entweder in S_- liegt oder gleich dem Startknoten ist, kann es höchstens $|S_-| + 1$ Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklassen geben. Zusätzlich wird dies noch durch die permanente Beschränkung $b_{\mathbf{perm}}$ begrenzt, da die Suffixlängen innerhalb des Intervalls $[b_{\mathbf{perm}}]$ liegen müssen und es pro Suffixlänge nur eine Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklasse geben kann. \square

Auf der Menge der temporalen s - z -Pfade mit Suffixtyp \mathbf{perm} kann für jeden Ausstieg höchstens eine Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklasse existieren. Zusätzlich kann es noch die \sim -Äquivalenzklasse für homogene temporale Pfade geben. Wir betrachten nun die Anzahl der Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklassen auf der Menge der temporalen s - z -Pfade mit Suffixtyp \mathbf{temp} .

Lemma 4.13. *Sei $\Pi_{s-z}^{b, \mathbf{temp}}$ die Menge der temporalen s - z -Pfade unter lokaler Beschränkung $b = (b_{\mathbf{perm}}, b_{\mathbf{temp}})$ mit Suffixtyp \mathbf{temp} . Es gibt höchstens $c_{\mathbf{temp}}^z = \min\{b_{\mathbf{temp}}, |\{(u, z, t, \lambda) \in E_{\mathbf{temp}}\}|\}$ \sim -Äquivalenzklassen auf $\Pi_{s-z}^{b, \mathbf{temp}}$, welche Pareto-optimal sind.*

Beweis. Seien P und P' zwei Pareto-optimale temporale s - z -Pfade mit Suffixtyp \mathbf{temp} , welche $e = (u, v, t, \lambda)$ als letzte temporale Kante haben. Wir zeigen, dass P und P' in der gleichen \sim -Äquivalenzklasse sind. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $\text{len}_{\text{suf}}(P) = \text{len}_{\text{suf}}(P')$. In diesem Fall ist sowohl Suffixlänge als auch die Ankunftszeit von P und P' identisch. Dementsprechend sind P und P' in der gleichen \sim -Äquivalenzklasse.

2. Fall: $\text{len}_{\text{suf}}(P) \neq \text{len}_{\text{suf}}(P')$. In diesem Fall dominiert der temporale Pfad mit der kleineren Suffixlänge den mit der größeren Suffixlänge, da die Ankunftszeit bei beiden identisch ist.

Da bei allen temporalen s - z -Pfadern mit Suffixtyp \mathbf{temp} die letzte temporale Kante in $\{(u, z, t, \lambda) \in E_{\mathbf{temp}}\}$ liegt, kann es höchstens $|\{(u, z, t, \lambda) \in E_{\mathbf{temp}}\}|$ Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklassen geben. Zusätzlich wird dies noch durch die temporale Beschränkung $b_{\mathbf{temp}}$ begrenzt, da die Suffixlängen innerhalb des Intervalls $[b_{\mathbf{temp}}]$ liegen müssen und es pro Suffixlänge nur eine Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklasse geben kann. \square

Auf der Menge der temporalen s - z -Pfade mit Suffixtyp \mathbf{temp} kann es also höchstens eine \sim -Äquivalenzklasse für jede in z eingehende temporale Kante geben. Es folgt, dass es höchstens $|E_{\mathbf{temp}}|$ viele Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklassen.

Durch diese Abschätzung können wir nun das Laufzeitverhalten von Algorithmus 1 bestimmen.

Theorem 4.14. *Algorithmus 1 hat eine Laufzeit in $O(c_{\mathbf{perm}} \cdot |E_0| \log(c_{\mathbf{perm}} \cdot |E_0|) + |E_{\mathbf{temp}}| \cdot \log c_{\mathbf{temp}}^{\max})$ und einen Speicherbedarf in $O((|V| + E_0) \cdot c_{\mathbf{perm}} + |E_{\mathbf{temp}}|)$. Dabei ist $c_{\mathbf{perm}} = \min\{|S_-| + 1, b_{\mathbf{perm}}\}$ und $c_{\mathbf{temp}}^{\max} = \min\{\max\{c_{\mathbf{temp}}^v \mid v \in V\}, b_{\mathbf{temp}}\}$, wobei $c_{\mathbf{temp}}^v = |\{(u, v, t, \lambda) \in E_{\mathbf{temp}}\}|$ ist.*

Beweis. Wir implementieren Q als *min-Heap*, wodurch einfügen und ausgeben mit $O(\log |Q|)$ Rechenoperationen geht [Cor+01]. Die Listen q_T für die beiden Typen $T \in$

$\{\text{perm}, \text{temp}\}$ werden als sortierte Listen implementiert. Dadurch dass jede Liste $q_T[v]$ mit $v \in V$ nur Paare zu Pareto-optimalen \sim -Äquivalenzklassen enthält, sind diese für den jeweiligen Typen durch c_{temp}^v und c_{perm} begrenzt. Die temporalen Kanten E_{temp} werden ebenfalls als sortierte Liste gespeichert. Die Initialisierung benötigt $O(|\{(s, v, 0, \lambda) \in E_0\}| \log |\{(s, v, 0, \lambda) \in E_0\}|)$ Schritte, um die entsprechenden Paare in Zeile 4 in Q einzufügen.

In der While-Schleife in Zeile 5 wird für den Vergleich der Ankunftszeiten von Zeile 6 bis Zeile 9 konstante Zeit benötigt. Der weitere Rechenaufwand, der für eine Iteration der While-Schleife in Zeile 5 benötigt wird, hängt davon ab, ob die bearbeitete Kante $e = (u, v, t, \lambda)$ eine temporale oder eine permanente Kante ist.

Wenn e eine temporale Kante ist, dann muss gegebenenfalls in Zeile 20 das passende Paar aus der Liste $q_{\text{temp}}[u]$ gesucht werden. Dies geht aufgrund der Sortierung von $q_T[u]$ mittels Binärsuche mit maximal $O(\log c_{\text{temp}}^{\max})$ Schritten. Um in den If-Abfragen in Zeile 17 und Zeile 19 das Paar mit minimaler Ankunftszeit zu finden, wird aufgrund der Sortierung von q_T konstanter Rechenaufwand benötigt, da nur das erste Element betrachtet werden muss.

Wenn e eine permanenten Kante ist, dann werden in Zeile 12 $O(\log |Q|)$ Rechenoperationen benötigt, um nach dem Entfernen des ersten Elements die Heap-Bedingung von Q wiederherzustellen.

Unabhängig von dem Typ der bearbeiteten Kante wird in Zeile 25 UPDATE aufgerufen. Die Funktion UPDATE benötigt konstanten Rechenaufwand um das letzte Paar aus der Liste $q_T[v]$ zu vergleichen und gegebenenfalls $q_T[v]$ zu erweitern.

Wenn UPDATE *True* zurückgibt, dann müssen in Zeile 29 die ausgehenden permanenten Kanten des Zielknoten v in Q eingefügt werden. Dies benötigt pro Kante $O(\log |Q|)$ Rechenoperationen.

Bei permanenten Kanten gibt UPDATE für jede Pareto-optimale \sim -Äquivalenzklasse einmal *True* zurück. Also höchstens c_{temp}^v mal pro Knoten $v \in V$. Bei temporalen Kanten gibt UPDATE nur bei der ersten Kante, welche v erreicht, *True* zurück, da sonst bereits ein Paar in der Liste $q_T[v]$ existiert und die Bedingung in UPDATE Zeile 13 verletzt wird. Also höchstens einmal pro Knoten $v \in V$.

Demnach wird Q pro Knoten $v \in V$ höchstens $c_{\text{perm}} + 1$ mal erweitert. Das Erweitern von Q benötigt pro Knoten $v \in V$ also maximal $O(c_{\text{perm}} \cdot |\{(v, w, 0, \lambda) \in E_0\}| \cdot \log |Q|)$ Schritte. Summiert man dies über alle Knoten, dann erhält man $O(c_{\text{perm}} \cdot |E_0| \cdot \log(c_{\text{perm}} \cdot |E_0|))$ Rechenoperationen.

Insgesamt gibt es höchstens $|E_{\text{temp}}|$ viele Iterationen, in denen eine temporale Kante bearbeitet wird und $|Q| = (c_{\text{perm}} + 1) \cdot |E_0|$ Iterationen, in denen eine permanente Kante bearbeitet wird.

Das ergibt insgesamt $O(|E_{\text{temp}}| \cdot \log c_{\text{temp}}^{\max})$ Rechenoperationen für das Suchen in Zeile 20 und $O(c_{\text{perm}} \cdot |E_0| \cdot \log(c_{\text{perm}} \cdot |E_0|))$ Rechenoperationen für das Einfügen und Ausgeben von Elementen aus Q . Da $|\{(s, v, 0, \lambda) \in E_0\}| \in [0, |E_0|]$ ist der Rechenaufwand der Initialisierung vernachlässigbar.

Es ergibt sich eine Gesamtlaufzeit in $O(c_{\text{perm}} \cdot |E_0| \log(c_{\text{perm}} \cdot |E_0|) + |E_{\text{temp}}| \log c_{\text{temp}}^{\max})$.

Der Speicherbedarf des Algorithmus ist durch die Größe der Listen q_T und der Warteschlange Q gegeben. Alle Listen q_{perm} sind laut Lemma 4.12 jeweils durch c_{perm} beschränkt.

Die Listen $q_{\text{temp}}[v]$ sind für alle Knoten $v \in V$ laut Lemma 4.13 jeweils durch c_{temp}^v beschränkt. Da c_{temp}^v die Anzahl der in v eingehenden temporalen Kanten ist, ist die Summe aller c_{temp}^v über alle Knoten $v \in V$ insgesamt $|E_{\text{perm}}|$. Die Warteschlange Q ist wie oben beschrieben durch $|E_0| \cdot c_{\text{perm}}$ begrenzt. Dementsprechend ist der gesamte Speicherbedarf, über alle Knoten summiert, durch $O(|E_{\text{temp}}| + c_{\text{perm}}(|V| + |E_0|))$ beschränkt. \square

Mit Algorithmus 1 können wir nun die Fahrzeiten für die verschiedenen Verkehrsmodi errechnen. Im folgenden Kapitel 5 analysieren wir mithilfe dessen die Fahrzeiten für Rad-Transit, unimodalen ÖPNV, unimodale Fahrradfahrten und ÖPNV in Kombination mit Leihrädern.

5 Experimente

In diesem Kapitel studieren wir das vorgestellte Modell in Bezug auf seine praktische Anwendung. Wir untersuchen dabei die Verkehrsmittel Fahrrad, ÖPNV (unimodal), Rad-Transit und Leihräder in Kombination mit ÖPNV als spezielle Form von Rad-Transit. Dazu betrachten wir den Einfluss der Rahmenbedingungen wie zum Beispiel das Erlauben beziehungsweise Verbieten von Busfahrten oder die Setzung von lokalen Beschränkungen, sowie den Einfluss von Reisebedingungen, wie zum Beispiel die Wahl vom Startpunkt oder die gereiste Distanz. Die verschiedenen Rahmenbedingungen nennen wir Profile und sind in Tabelle 5.1 definiert. Die Experimente werden auf zwei Städten ausgeführt, Berlin und Hamburg. Wir vergleichen unsere Ergebnisse der verschiedenen Profile für Berlin.

5.1 Datenerzeugung

Tabelle 5.1: Definition der Profile

Profil	Geschwindigkeit	Verwendeter Graph	b_{perm}	b_{temp}
Fahrrad (unimodal)	4.0 m/s	G_3	∞	0 s
ÖPNV (unimodal)	1.5 m/s	G_1	∞	∞
Rad-Transit	4.0 m/s	G_3	∞	∞
ÖPNV + Leihrad	4.0 m/s	G_2	30 min	∞

Um das Verkehrsnetz zu modellieren nutzen wir OSM- und GTFS-Daten. Zur Extraktion des Straßenverkehrsnetzes aus OSM-Daten wurde das Python-Tool OSMnx [Boe17] verwendet. Die entsprechenden GTFS-Datensätze wurden mit GTFS-Kit [Rai] eingelesen und mit python als temporaler Graph formatiert. Anschließend wurde das Straßenverkehrsnetz mit dem ÖPNV-Netzwerk verbunden, wodurch ein semi-temporaler Graph entsteht, welcher das für Rad-Transit nutzbare Verkehrsnetzwerk abbildet. Dazu wurde für jede Station im ÖPNV-Netzwerk der räumlich nächste Knoten im Straßenverkehrsnetz gesucht und mit der Station verbunden. Die Reisezeit der dabei entstehenden Kante ergibt sich aus der Distanz zwischen den beiden Knoten und der *Wechselzeit*. Die Wechselzeit bemisst die Zeit, welche für das Einsteigen beziehungsweise Aussteigen aus dem ÖPNV benötigt wird und ist in Tabelle 5.2 definiert. Alle Knoten und permanente Kanten werden dabei als *NetworkX MultiDiGraph* [Net14] gespeichert und alle temporalen Kanten als *Pandas-DataFrame* [The20].

Da unser Modell keine Ampeln oder Kreuzungen in die Berechnung der Fahrzeit einbezieht, haben wir die Geschwindigkeiten der Profile in Tabelle 5.1 zu Gunsten

5 Experimente

Tabelle 5.2: Größe der verwendeten temporalen Graphen und die zur Erstellung benötigte Zeit

Name	$ V $	$ E_{\text{perm}} $	$ E_{\text{temp}} $	$ S_- $	Wechselzeit	Zeitaufwand
G_1	295139	788276	240226	4045	16 s	7 min 41 s
G_2	171208	405046	240226	4045	25 s	5 min 21 s
G_3	161095	405046	57902	674	25 s	5 min 34 s

vom ÖPNV abgeschätzt. Dabei wurde die Geschwindigkeit für das Radfahren, welche durchschnittlich bei 4.47 m/s liegt [Sch+17], auf 4 m/s nach unten abgeschätzt und die Geschwindigkeit zu Fuß, welche durchschnittlich bei 1.4 m/s [Bro+06] liegt, wurde auf 1.5 m/s nach oben abgeschätzt.

Durch die verschiedenen Einschränkungen und unterschiedlichen Verkehrsnetze verwenden wir insgesamt drei semi-temporale Graphen pro Stadt für die verschiedenen Profile aus Tabelle 5.1.

1. Der semi-temporale Graph G_1 wird von dem Profil ÖPNV (unimodal) genutzt, in diesem sind alle öffentlich Fußwege mit dem gesamten ÖPNV-Netzwerk verbunden.
2. Der semi-temporale Graph G_2 wird von dem Profil ÖPNV + Leihrad genutzt, in diesem sind alle Fahrradwege und Straßen, auf denen Fahrradfahren erlaubt ist, mit dem gesamten ÖPNV-Netzwerk verbunden.
3. Der semi-temporale Graph G_3 wird von den Profilen Rad-Transit und Fahrrad (unimodal) genutzt, dieser ist ein Teilgraph von G_2 . In G_3 sind nur ÖPNV-Verbindungen enthalten, welche den GTFS-Tag `bikes_allowed` erfüllen.

Die Anzahl der Knoten, Kanten und Stationen der temporalen Graphen für Berlin, sowie die zur Erzeugung benötigte Zeit, sind in der Tabelle 5.2 beschrieben. Diese Wechselzeit für Rad-Transit und ÖPNV + Leihrad ist höher als für ÖPNV (unimodal), da gegebenenfalls ein Fahrstuhl benutzt werden muss oder das Leihrad ab- und angeschlossen werden muss. Hierzu konnten wir keine Angaben finden, weshalb diese Werte geschätzt sind.

Das Profil ÖPNV + Leihrad simuliert Fahrten unter der Annahme, dass an jeder ÖPNV-Haltestelle ein Leihrad verfügbar ist. Aus diesem Grund ist hier für die ÖPNV-Verbindungen die Fahrradmitnahme nicht wichtig, weshalb der gesamte ÖPNV genutzt werden kann. Zudem wurde hier die lokale Beschränkung b_{perm} auf 30 min gesetzt, da einige Leihraddienste wie zum Beispiel Nextbike oder StadtRAD Freifahrten anbieten, solange diese jeweils nicht länger als 30 min dauern. Für das Profil Fahrrad (unimodal) wurde die lokale Beschränkung b_{temp} auf 0 s gesetzt, da hier jegliche ÖPNV-Fahrten ausgeschlossen sind. Die anderen Profile sind alle unbeschränkt.

Da im GTFS-Datensatz für Hamburg die Information bezüglich der Fahrradmitnahme fehlen, haben wir diese generell zugelassen. Aus diesem Grund sind die Experimente für die Stadt Hamburg in diesem Punkt leider ungenauer als die für Berlin, da bei der Berechnung eventuell Busverbindungen genutzt werden, in denen keine Fahrradmitnahme erlaubt ist.

Tabelle 5.3: Reichweiten der verschiedenen Profile aus Tabelle 5.1 innerhalb von 40 min - 45 min

Profil	Stadt	Minimum	Maximum	Durchschnitt
Fahrrad (unimodal)	Berlin	6.092 km	9.856 km	8.740 km
	Hamburg	4.746 km	10.042 km	8.746 km
ÖPNV (unimodal)	Berlin	4.035 km	17.091 km	8.724 km
	Hamburg	2.099 km	21.038 km	10.661 km
Rad-Transit	Berlin	7.263 km	26.458 km	13.684 km
	Hamburg	5.688 km	28.611 km	14.912 km
ÖPNV + Leihrad	Berlin	7.263 km	26.458 km	13.890 km
	Hamburg	5.471 km	28.611 km	14.901 km

Der Vergleich zwischen unimodaler ÖPNV-Nutzung und Rad-Transit ist in Hamburg deshalb eindeutig zu Vorteilen von Rad-Transit, da die gleichen ÖPNV-Verbindungen genutzt werden können, jedoch eine höheren Geschwindigkeit im Straßenverkehrsnetz genutzt wird. Aus diesem Grund werden wir die Profile ausschließlich für Berlin vergleichen. Die Reichweite vom Stadtzentrum betrachten wir jedoch für beide Städte. Zur Übersichtlichkeit sind die Karten für Hamburg separat im Abschnitt 5.4 angehängt.

Die zur Erzeugung der Daten genutzten Python-Skripte sind öffentlich zugänglich¹. Die Experimente wurden für Mittwoch den 11.11.2020 um 12:00 Uhr ausgeführt. Das verwendete OSM-Abbild wurde am 12.11.2020 bezogen. Die geografischen Berechnungen wurden im geografischen Koordinatenreferenzsystem *WGS84* durchgeführt. Die Experimente wurden mit *Python 3.8* auf *Ubuntu 18.04* mit *Linux-Kernel 4.15* ausgeführt. Dazu wurde ein Server mit *Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1620* und 64GB Arbeitsspeicher verwendet.

5.2 Reichweite für Fahrten aus dem Stadtzentrum

In diesem Abschnitt geht es um die Reichweite der verschiedenen Verkehrsmittel. Dabei vergleichen wir die Profile aus Tabelle 5.1 bezüglich der Entfernung, welche innerhalb von 45 min vom Stadtzentrum aus gereist werden kann. Die Ergebnisse stellen wir in der Form von *Erreichbarkeitskarten* dar.

Erreichbarkeitskarten, auch als isochrone Karten bezeichnet, sind eine kartenbasierte Darstellung, welche auf einen Standpunkt bezogen die Erreichbarkeit des ihn umgebenden Gebiets markieren. Dabei kann die Erreichbarkeit unterschiedlich definiert werden, wie zum Beispiel durch eine zeitliche Beschränkung der Reisedauer oder eine lokale Beschränkung der Wege. Oftmals werden mehrere Erreichbarkeitsgebiete durch die Einordnung in verschiedene Intervalle erzeugt. Um die Erreichbarkeitsgebiete zu unter-

¹<https://gitlab.tubit.tu-berlin.de/l.rasche/bike-transit-analysis.git>

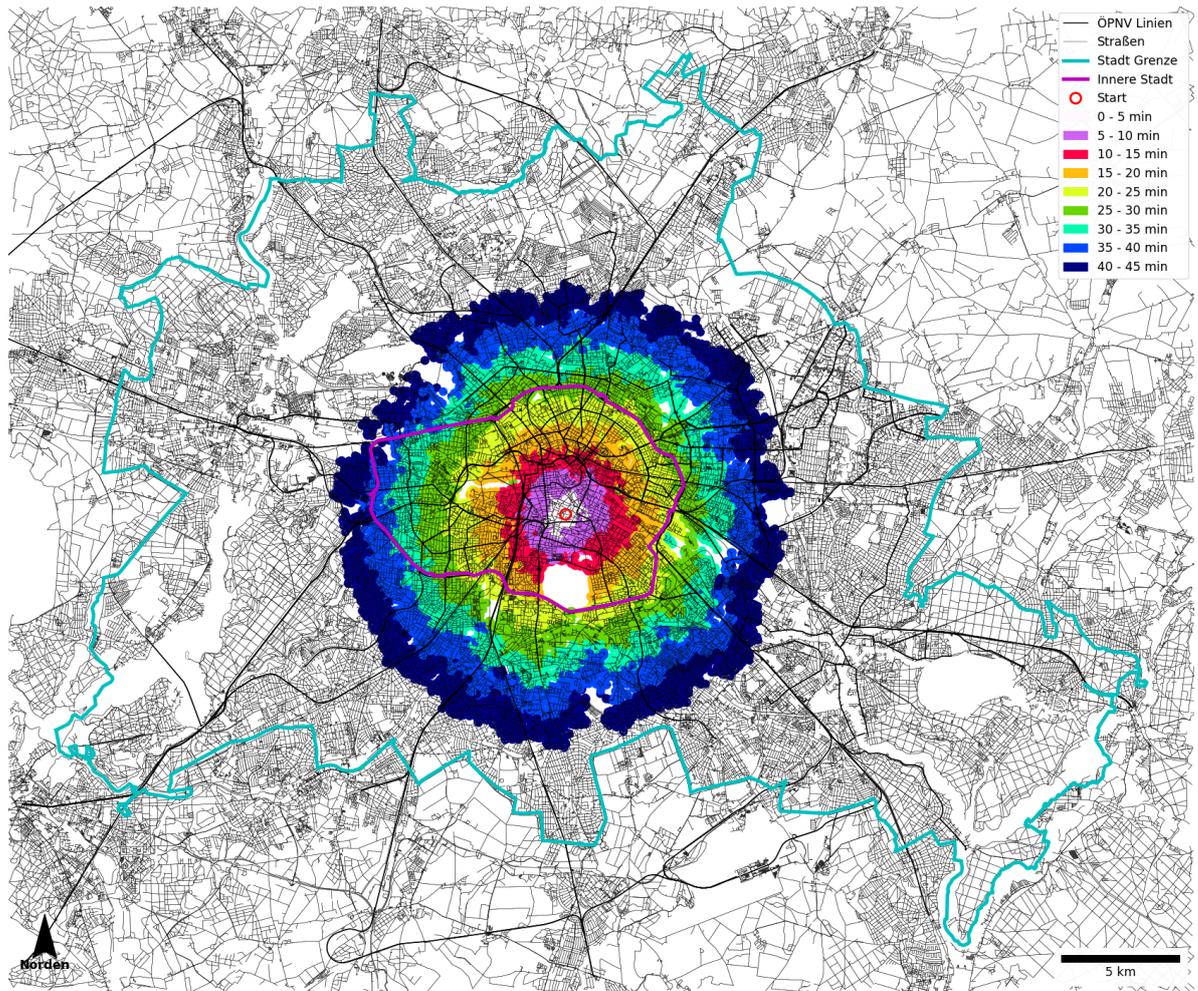


Abbildung 5.1: Erreichbarkeit mit dem Fahrrad (unimodal) für Berlin um 12:00 Uhr.

scheiden, werden diese unterschiedlich gefärbt. Das i -te Erreichbarkeitsgebiet umfasst in unserem Fall Reisezeiten, welche in dem Intervall $[(i - 1) \cdot 5 \text{ min}, i \cdot 5 \text{ min}]$ liegen. Als Startpunkt wurde jeweils der geometrische Schwerpunkt der jeweiligen Stadt benutzt.

In Abbildung 5.1 sind die Erreichbarkeitsgebiete fürs Fahrradfahren dargestellt. Die Erreichbarkeitsgebiete sind hier alle relativ gleichmäßig und haben die Form von konzentrischen Ringen um den Startpunkt. In Abbildung 5.2 sind die Erreichbarkeitsgebiete für unimodale ÖPNV-Nutzung abgebildet. Diese sind wesentlich unregelmäßiger als in Abbildung 5.1 und die Form scheint sich durch die Form der ÖPNV-Linien zu bedingen. Zudem gibt es einzelne räumlich getrennte Erreichbarkeitsgebiete entlang der ÖPNV-Linien. Abbildung 5.3 zeigt die Erreichbarkeitsgebiete für Rad-Transit. Diese zeigen eine ähnliche Struktur der Erreichbarkeitsgebiete wie in Abbildung 5.2, jedoch wird hier eine wesentlich größerer Bereich abgedeckt. Außerdem gibt es in Abbildung 5.3 im inneren Bereich erneut eine kreisförmige Struktur der Erreichbarkeitsgebiete, welche dann zum Rand hin unschärfer wird. Abbildung 5.4 zeigt die Erreichbarkeitsgebiete für

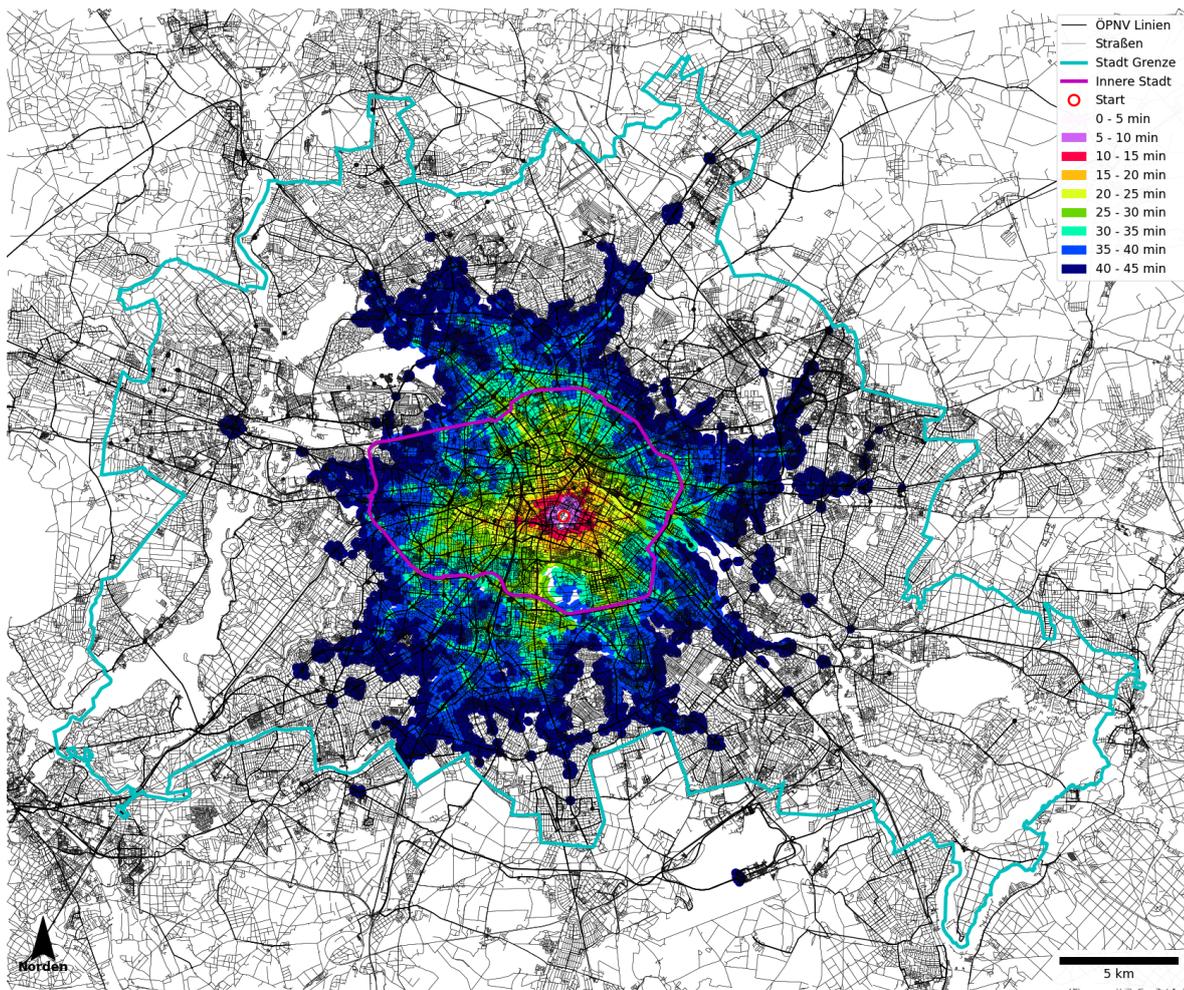


Abbildung 5.2: Erreichbarkeit mit ÖPNV (unimodal) für Berlin um 12:00 Uhr.

ÖPNV + Leihrad. Diese sind fast identisch zu Abbildung 5.3, jedoch gibt es ein weiteres erreichtes Gebiet im Süden, welches ohne Busfahrten anscheinend nicht innerhalb von 45 min erreichbar ist.

Um nun die Reichweite zu bemessen, betrachten wir die durchschnittliche Entfernung des letzten Intervalls. Dazu vergleichen wir in der Tabelle 5.3 alle Knoten, bei denen die Fahrzeit zwischen 40 min und 45 min liegt, bezüglich ihrer Entfernung (Luftlinie) zum Startpunkt. In Hamburg ist für jedes Profil das Minimum und Maximum der Reichweite weiter auseinander als in Berlin. Ebenfalls hat Hamburg für alle Profile eine höhere durchschnittliche Reichweite als Berlin. In Berlin hat ÖPNV + Leihrad die größte Reichweite und in Hamburg Rad-Transit. Dass in Hamburg Rad-Transit ÖPNV + Leihrad übertrifft, liegt daran, dass in Hamburg sich ÖPNV + Leihrad nur durch die zusätzliche lokale Beschränkung von Rad-Transit unterscheidet. In Berlin ist der Unterschied zwischen ÖPNV (unimodal) und Rad-Transit mit fast 5 km jedoch etwas höher als in Hamburg mit etwas über 4 km.

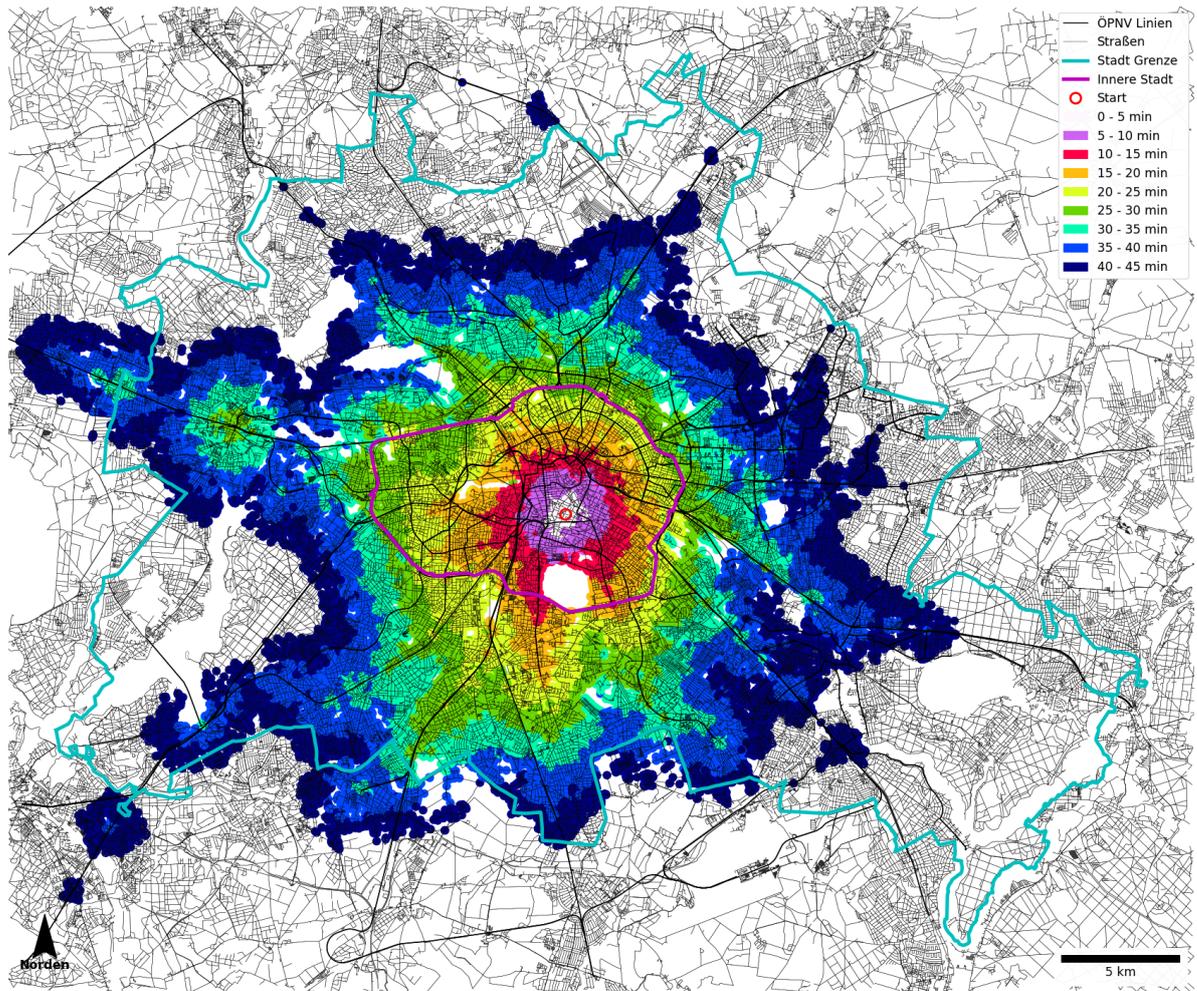


Abbildung 5.3: Erreichbarkeit mit Rad-Transit für Berlin um 12:00 Uhr.

Diese Unterschiede könnten entweder durch einen schnelleren ÖPNV in Hamburg entstanden sein, oder durch die Lage des Startpunkts.

In Abbildung 5.5a und Abbildung 5.5b werden die Fahrzeiten für die Profile Rad-Transit, Fahrrad und ÖPNV (unimodal) bezüglich ihrer Entfernung zum Startpunkt dargestellt (ohne 45 min Beschränkung). Das Profil ÖPNV + Leihrad ist hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht abgebildet, eine Analyse hierzu folgt im Abschnitt 5.3. Die Werte der Fahrradfahrten scheinen wesentlich geringer zu streuen als die der ÖPNV- und Rad-Transit-Fahrten. Dies liegt vermutlich daran, dass bei Fahrradfahrten keine zeitlichen Abhängigkeiten bestehen und die Fahrzeit nur von der Länge der gereisten Strecke abhängt. Diese wiederum scheint bei dem dichten Straßennetz der Stadt stark von der Entfernung zwischen Start und Ziel abzuhängen. Jedoch scheint auch hier ein Unterschied zwischen den beiden Städten zu bestehen, so dass die Fahrzeiten in Hamburg bei allen Profilen deutlich weiter auseinander liegen als in Berlin. Ein möglicher Grund dafür ist die räumliche Unterteilung von Hamburg durch die Elbe und deren Ausläufer.

5.2 Reichweite für Fahrten aus dem Stadtzentrum

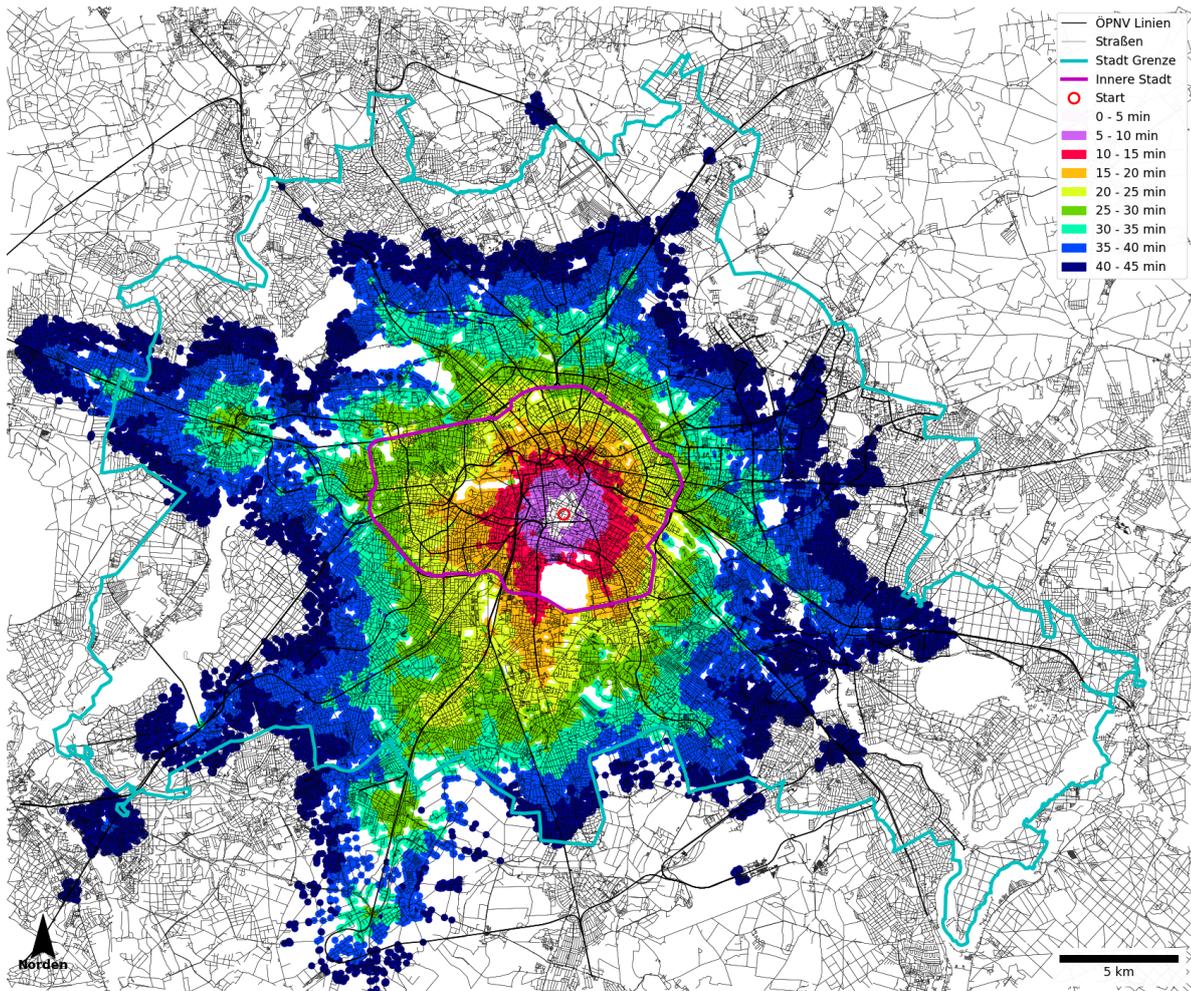


Abbildung 5.4: Erreichbarkeit mit ÖPNV + Leihrad für Berlin um 12:00 Uhr.

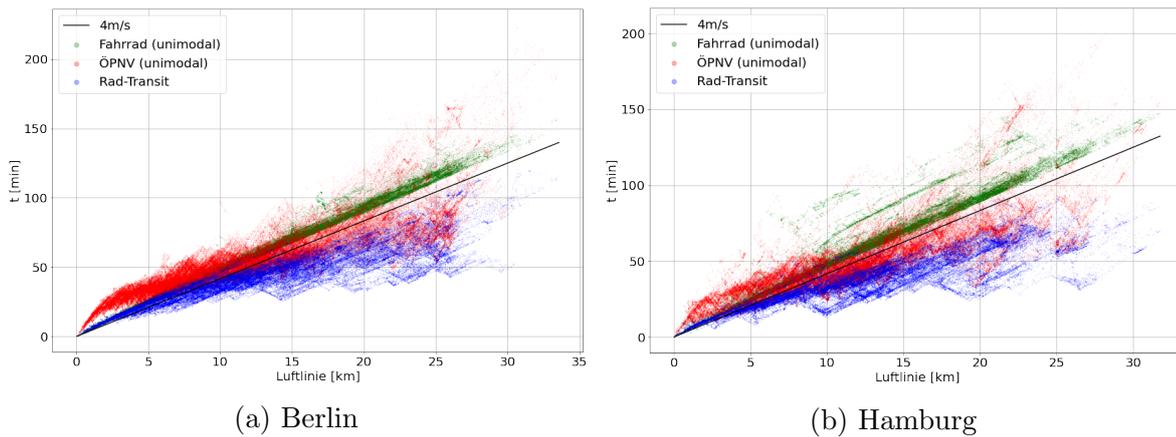


Abbildung 5.5: Fahrzeit nach Entfernung (Luftlinie) zwischen Start und Ziel für die Profile aus Tabelle 5.1 (ohne ÖPNV + Leihrad).

Da sich diese Werte alle auf einen exemplarischen Startpunkt beziehen und die Wahl dessen maßgeblich die ÖPNV-Anbindung und damit verbundene Fahrzeit bestimmt, führen wir in Abschnitt 5.3 eine quantitative Analyse von 1000 zufällig gewählten Startpunkten durch.

5.3 Quantitative Analyse von mehreren Startpunkten

In diesem Abschnitt analysieren wir die Fahrzeiten von vielen verschiedenen Startpunkten. Dazu betrachten wir 1000 zufällig gewählte Startpunkte aus der Region Berlin und berechnen für diese die Fahrzeiten zu allen Punkten. Zur Erstellung der Startpunkte generieren wir 1000 zufällige Koordinaten innerhalb des in Abbildung 5.3 umfassten Gebietes und wählen davon ausgehend jeweils den räumlich nächsten Knoten. Da wir pro Startpunkt für jeden Knoten im temporalen Graph eine Fahrzeit erhalten, entstehen über 160.000.000 verschiedene Fahrzeiten pro Profil.

In Tabelle 5.4 sind Durchschnitt und Standardabweichung für die Fahrzeiten der verschiedenen Profile abgebildet. Die Fahrzeiten wurden dazu in 40 Entfernungsklassen eingeteilt. Dabei umfasst die i -te Entfernungsklasse Fahrzeiten, bei denen die Entfernung (Luftlinie) zwischen Start und Ziel in dem Intervall $[(i - 1) \cdot 2 \text{ km}, i \cdot 2 \text{ km}]$ liegen.

Auffällig ist, dass Fahrten mit dem ÖPNV (unimodal) im Durchschnitt erst ab 18 km Entfernung schneller sind als mit dem Fahrrad (unimodal). Zudem ist Rad-Transit durchschnittlich auf jeder Entfernung schneller als unimodale ÖPNV-Nutzung und ab 2 km Entfernung auch schneller als Fahrradfahren (unimodal). Die Differenz der durchschnittlichen Fahrzeit zwischen Rad-Transit und unimodaler ÖPNV-Nutzung steigt mit der gereisten Entfernung. Da es sich hier um durchschnittliche Werte handelt, betrachten wir zusätzlich die Standardabweichung der Fahrzeiten nach Entfernungsklasse. Dabei wird unsere Beobachtung aus Abschnitt 5.2 bestätigt, dass die Fahrzeiten bei Fahrradfahrten weniger variieren. Dies ist jedoch erst bei Entfernungen über 10 km der Fall, davor scheint die Wahl von Start und Ziel einen stärkeren Einfluss auf die Reisezeit zu haben. Die Standardabweichung für Rad-Transit ist innerhalb der Strecken unter 10 km vermutlich deshalb so gering, weil die direkten Fahrten mit dem Fahrrad und die intermodalen Fahrten ähnlich viel Zeit benötigen.

Da durch die lokale Beschränkung für das Profil ÖPNV + Leihrad eventuell nicht mehr alle Knoten erreicht werden können, betrachten wir in Tabelle 5.5 die Anzahl der erreichten Knoten und die damit zusammenhängende Berechnungszeit. Dabei fällt auf, dass im Durchschnitt mit 99.7% fast alle Knoten im temporalen Graph erreicht werden können. Das hängt damit zusammen, dass sobald das ÖPNV-Netzwerk erreicht wird, fast alle Knoten erreichbar sind. Also ist der Großteil aller Knoten höchstens 30 min Fahrzeit von einer ÖPNV-Station entfernt. Jedoch gibt es anscheinend auch vereinzelte Knoten, welche dies nicht sind, so dass von diesen Knoten ausgehend durch die lokale Beschränkung nur ein sehr kleiner Teil aller Knoten erreichbar ist. Dies wirkt sich zudem auf die Berechnungszeit aus, da mehr Knoten mehr Zeit beanspruchen. So variiert die Berechnungszeit zwischen 1 min 19 s und 13 min 10 s, je nachdem ob das ÖPNV-Netzwerk erreicht wird oder nicht. Im Durchschnitt dauert so eine Berechnung etwas unter 11 min.

5.3 Quantitative Analyse von mehreren Startpunkten

Tabelle 5.4: Durchschnitt μ (min) und Standardabweichung σ (min) der Fahrzeiten nach Entfernungsklassen (km).

Entfernung	Fahrrad (unimodal)		ÖPNV (unimodal)		Rad-Transit		ÖPNV + Leihrad	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
0 - 2	9	6	19	9	9	5	9	6
2 - 4	19	10	34	13	18	8	18	9
4 - 6	29	12	46	17	28	9	28	11
6 - 8	39	12	55	20	36	9	37	13
8 - 10	48	12	62	23	43	10	44	14
10 - 12	58	11	68	23	50	11	51	16
12 - 14	67	10	74	24	55	11	56	17
14 - 16	76	9	80	25	61	12	62	18
16 - 18	85	8	85	25	66	13	66	18
18 - 20	94	8	90	25	71	14	71	19
20 - 22	103	7	95	25	75	15	75	19
22 - 24	112	7	100	26	79	15	79	20
24 - 26	122	8	106	26	84	16	84	20
26 - 28	131	8	111	27	88	16	89	21
28 - 30	140	8	116	27	92	16	94	21
30 - 32	149	8	122	28	96	16	98	22
32 - 34	158	8	128	28	100	16	102	22
34 - 36	167	8	133	29	104	16	107	23
36 - 38	176	8	138	30	108	17	111	24
38 - 40	186	8	143	31	112	17	116	25

Tabelle 5.5: Berechnungszeit und Anzahl der erreichten Knoten für das Profil ÖPNV+Leihrad.

	Erreichte Knoten	Erreichter Anteil	Berechnungszeit
Minimum	295	0.2 %	1 min 19 s
Maximum	170948	99.8 %	13 min 10 s
Durchschnitt	170721	99.7 %	10 min 52 s

Da die einzelnen Berechnungen der 1000 Startpunkte unabhängig voneinander sind, haben wir die Berechnungen in 8 *Threads* parallel laufen lassen, um so die gesamte Berechnungsdauer zu verkürzen.

In Abbildung 5.6a sind die durchschnittlichen Fahrzeiten nach Entfernung dargestellt und in Abbildung 5.6b die Standardabweichung nach Entfernung. Hierbei wurden die Fahrzeiten in 500 Entfernungsklassen, welche jeweils 100 m umfassen, eingeteilt. In Abbildung 5.6a wächst die durchschnittliche Fahrzeit mit dem Fahrrad fast linear zur

5 Experimente

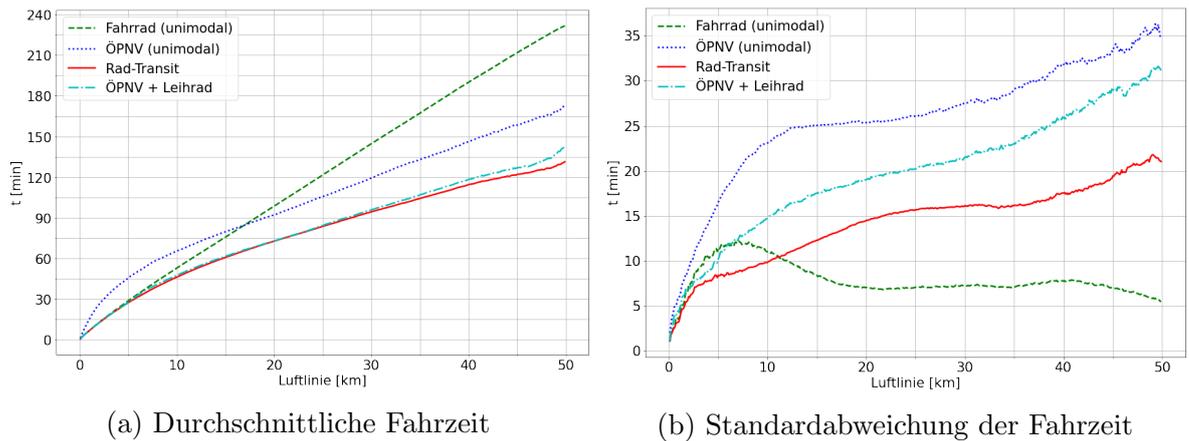


Abbildung 5.6: Durchschnittliche Fahrzeit und Standardabweichung nach Entfernung (Luftlinie) für die Profile aus Tabelle 5.1.

gereisten Entfernung. Dies steht in Zusammenhang mit der konzentrischen Form der Erreichbarkeitsgebiete in Abbildung 5.1. Bei Rad-Transit und ÖPNV hingegen stellt sich erst ab 10 km Entfernung eine etwas gleichmäßigere Geschwindigkeit ein. In Abbildung 5.6b steigt die Standardabweichung bei Fahrradfahrten bis zu 7 km Entfernung an, nimmt danach wieder ab und bleibt ab 18 km Entfernung ziemlich konstant bei 7 min. Die Standardabweichung von ÖPNV-Fahrten steigt als erstes stark mit der Entfernung der Strecke und nimmt dann ab 12 km nur noch langsam mit der Entfernung zu. Die Standardabweichung für Rad-Transit liegt bei Fahrten über 7 km Entfernung mindestens 10 min unter der von ÖPNV (unimodal), wobei die Differenz mit der Entfernung steigt. Das bedeutet, dass Rad-Transit Fahrten mit ähnlicher Entfernung ähnlich viel Fahrzeit beanspruchen. Demnach ist die Zugänglichkeit bei Rad-Transit gleichmäßiger als bei unimodaler ÖPNV-Nutzung. In Abbildung 5.6a liegen die durchschnittlichen Fahrzeiten von Rad-Transit und ÖPNV + Leihrad sehr nah zusammen. Ab etwa 25 km Entfernung ist jedoch ein geringer Unterschied erkennbar, welcher mit der Entfernung steigt, so dass Rad-Transit in diesem Bereich etwas schneller ist. Bei der Standardabweichung in Abbildung 5.6b ist ein deutlicher Unterschied zwischen Rad-Transit und ÖPNV + Leihrad zu erkennen. Die Standardabweichung von ÖPNV + Leihrad liegt ungefähr in der Mitte zwischen der Standardabweichung von Rad-Transit und ÖPNV (unimodal). Um die beobachteten Effekte besser erklären zu können, betrachten wir nun die Fahrzeiten nach der Lage des Startpunktes.

Einteilung nach Gebiet.

Da die Anbindung in der Stadt nicht überall gleich gut ist, und zum Beispiel die innere Stadt wesentlich besser angebunden ist als der Rand und die Gebiete außerhalb der Stadt, betrachten wir nun die durchschnittlichen Fahrzeiten und Standardabweichung für die verschiedenen Stadtgebiete getrennt. Dazu verwenden wir eine Einteilung in drei verschiedene Gebiete.

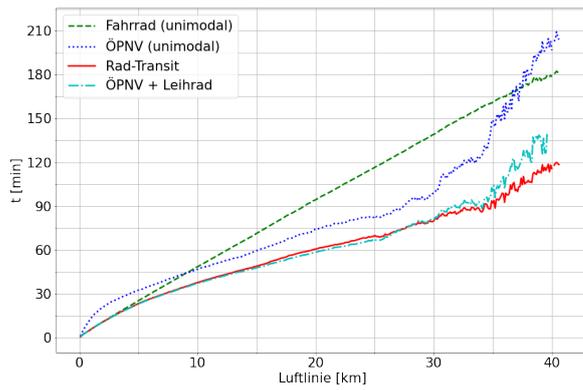
1. Die innere Stadt: Gebiet innerhalb des S-Bahn-Rings;
2. Die äußere Stadt: Gebiet zwischen S-Bahn-Ring und Stadtgrenze;
3. Außerhalb der Stadt: Gebiet außerhalb der Stadtgrenze, welche noch auf den Karten aus Abschnitt 5.2 abgebildet wird.

Die Einteilung der inneren Stadt basiert auf dem Gebiet, welches von der Senatsverwaltung für Stadtentwicklung und Wohnen als Planwerk Innere Stadt bezeichnet wird [Sen]. In Abbildung 5.3 sind die verschiedenen Regionen gekennzeichnet. Hierbei sind die Fahrzeiten nach der Lage ihres Startpunkts kategorisiert, die Endpunkte spielen in diesem Fall keine Rolle für die Einteilung.

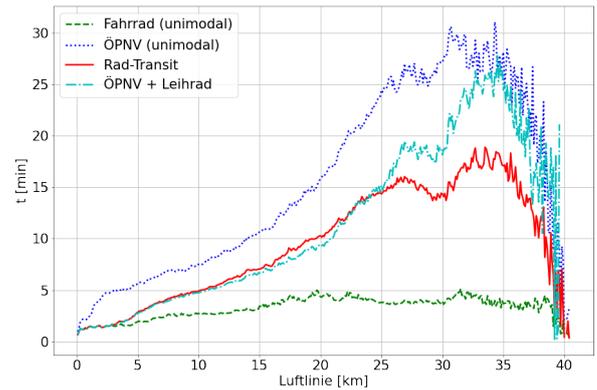
Bei der Einteilung in die Gebiete fällt auf, dass der größte Teil der Startpunkte außerhalb der Stadtgrenze liegen. Insgesamt liegen 37 Startpunkte in der inneren Stadt, 372 Startpunkte in der äußeren Stadt und 591 Startpunkte außerhalb der Stadt. Aus diesem Grund sind Abbildung 5.6a und Abbildung 5.6b am stärksten durch Fahrten außerhalb der Stadt beeinflusst. Die Werte wurden genau wie in Abbildung 5.6a und Abbildung 5.6b in Entfernungsklassen von je 100 m eingeteilt.

Innere Stadt. Abbildung 5.7a und Abbildung 5.7b zeigen die durchschnittliche Fahrzeit und Standardabweichung der Fahrzeit für Fahrten aus der inneren Stadt. In Abbildung 5.7a ist die Fahrzeit von ÖPNV und Rad-Transit wesentlich näher beieinander als in Abbildung 5.6a, so dass die ÖPNV-Nutzung durchschnittlich ab 9 km Entfernung schneller ist als Fahrradfahren. Ab etwa 30 km Entfernung wird der Abstand zwischen ÖPNV und Rad-Transit deutlich stärker. Dies wird wahrscheinlich durch die schlechtere Anbindung im Randgebiet der Stadt verursacht. Zudem gibt es in dieser Region nur 37 Startpunkte und der verwendete temporale Graph ist am Rand wesentlich dünner besetzt als in der Mitte, dadurch gibt es in diesem Bereich für hohe Entfernungen weniger Fahrzeiten und die Funktion schlägt stärker aus. In Abbildung 5.7b ist dieser Effekt noch stärker zu sehen. In diesem Fall springt die Standardabweichung zwischen verschiedenen Werten und beginnt entgegen dem Trend zu sinken. Aus diesem Grund werden diese Werte in Abbildung 5.8a nicht betrachtet. Im Vergleich zur Abbildung 5.6b ist in Abbildung 5.7b kein anfänglicher Anstieg der Standardabweichung für Fahrradfahrten erkennbar. Dies hängt vermutlich mit dem dichten Straßenverkehrsnetz in der Stadt zusammen, welches abgesehen vom Tempelhofer Feld keine großen Unterbrechungen hat. Zudem wächst die Standardabweichung beim ÖPNV (unimodal) am Anfang geringer als in Abbildung 5.6b und fängt erst ab 15 km an, stärker mit der Entfernung zu wachsen. Bei den Fahrten bis 20 km Entfernung ist jedoch auch hier eine deutlich kleinere Differenz zwischen der Standardabweichung von ÖPNV und Rad-Transit zu erkennen. Hier scheint die Zugänglichkeit von Rad-Transit und ÖPNV (unimodal) wesentlich ähnlicher zu sein. Die durchschnittliche Fahrzeit und die Standardabweichung von ÖPNV + Leihrad liegen bei Entfernungen von 10 km bis etwas über 25 km leicht unter den Werten von Rad-Transit. Dies ist vermutlich durch die zusätzlichen Busverbindungen bedingt und aus dem Grund, dass fast alle Punkte in der inneren Stadt innerhalb von 30 min von einer Station erreicht werden können. Interessant ist zudem, dass bei Strecken über 37 km

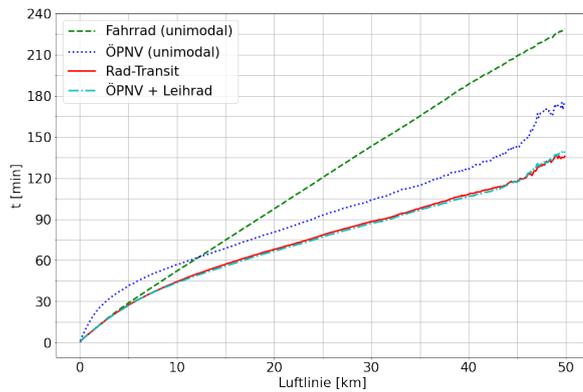
5 Experimente



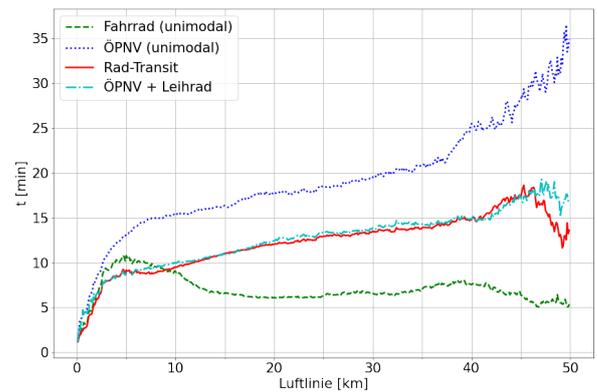
(a) Durchschnittliche Fahrzeit aus der inneren Stadt



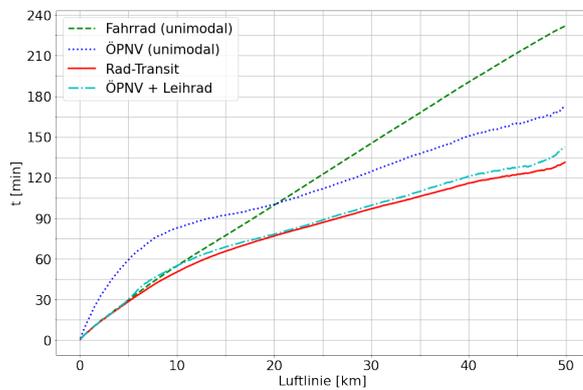
(b) Standardabweichung der Fahrzeit aus der inneren Stadt



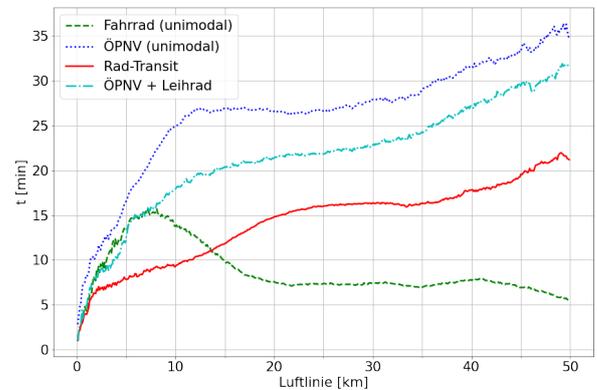
(c) Durchschnittliche Fahrzeit aus der äußeren Stadt



(d) Standardabweichung der Fahrzeit aus der äußeren Stadt



(e) Durchschnittliche Fahrzeit außerhalb der Stadt



(f) Standardabweichung der Fahrzeit außerhalb der Stadt

Abbildung 5.7: Standardabweichung und durchschnittliche Fahrzeit nach Lage des Startpunktes und Entfernung (Luftlinie) für die Profil aus Tabelle 5.1.

Entfernung, Fahrradfahren wieder weniger Zeit als der ÖPNV (unimodal) benötigt. Dies könnte jedoch ebenfalls durch die geringe Menge an Werten verursacht worden sein.

Äußere Stadt. In Abbildung 5.7c sind die Fahrzeiten für Rad-Transit und ÖPNV ähnlich nah bei einander wie in Abbildung 5.7a. Jedoch ist ÖPNV durchschnittlich erst ab Entfernungen von 12 km schneller als Fahrradfahren. Zudem fangen die Fahrzeiten erst ab 45 km an zu schwanken, da es in dieser Region wesentlich mehr Fahrzeiten für lange Strecken gibt. Diese wirkt sich ebenso auf die Standardabweichung in Abbildung 5.7d aus, welche ebenfalls erst bei über 40 km anfängt zu springen. Zudem ist bei den Fahrzeiten fürs unimodale Fahrradfahren ähnlich wie in Abbildung 5.6b ein erhöhte Standardabweichung im Bereich von 2 km bis 12 km zu erkennen. Dies wird vermutlich durch das etwas weitere Straßennetz oder große Gewässer, wie zum Beispiel die Havel oder den Müggelsee verursacht, wodurch für kurze Strecken überdurchschnittlich viel Zeit benötigt wird. Auf weiteren Entfernungen können diese vermutlich besser umfahren werden und haben dadurch im Verhältnis zur gesamten Fahrzeit geringere Auswirkungen. Die Standardabweichung von Rad-Transit und ÖPNV (unimodal) sind in Abbildung 5.7d wieder etwas weiter auseinander als in Abbildung 5.7b, da die Dichte an Stationen in diesem Gebiet etwas geringer ist, was eine unmittelbare Auswirkung auf die Zugänglichkeit hat. Die durchschnittliche Fahrzeit für ÖPNV + Leihrad liegt bei Entfernungen bis zu 45 km knapp unter der durchschnittlichen Fahrzeit von Rad-Transit. Die Standardabweichung von ÖPNV + Leihrad verhält sich sehr ähnlich zu der von Rad-Transit, schlägt jedoch ab 45 km Entfernung etwas weiter nach oben aus.

Außerhalb der Stadt. In Abbildung 5.7e ist ein deutlich stärkerer Unterschied zwischen den durchschnittlichen Fahrzeiten von ÖPNV und Rad-Transit erkennbar. Diese Differenz ist bei Strecken von etwa 8 km Entfernung bei über 30 min. Danach verkleinert sich der Abstand bei Strecken bis zu 20 km Entfernung und beginnt danach wieder zu steigen. Die Standardabweichung in Abbildung 5.7f ist für ÖPNV-Fahrten deutlich höher als in der inneren und äußeren Stadt. Dies ist vermutlich durch die ungleichmäßige Anbindung außerhalb der Stadt bedingt, welche für überdurchschnittlich hohe und stark variierende Fahrzeiten sorgt. Bei Rad-Transit wirkt sich dies weniger stark aus, so dass hier der Zugang zum ÖPNV-Netzwerk wesentlich durch die intermodale Nutzung durch Fahrradfahren erhöht wird. Dadurch ist die Standardabweichung von ÖPNV (unimodal) und Rad-Transit in diesem Gebiet am weitesten auseinander, so dass ab über 7 km Entfernung ein Unterschied von mindestens 10 min besteht. Hier hat Rad-Transit also in Folge von einer noch geringeren Stationsdichte den stärksten Unterschied zu unimodaler ÖPNV-Nutzung bezüglich der Zugänglichkeit. Zudem ist in Abbildung 5.7f ebenfalls eine erhöhte Standardabweichung für Fahrradfahrten bei Strecken bis zu 18 km Entfernung erkennbar. Diese ist hier noch stärker ausgeprägt als in Abbildung 5.7d und wird vermutlich durch das wesentlich weitere Straßennetz verursacht. In diesem Gebiet ist die durchschnittliche Fahrzeit von ÖPNV + Leihrad knapp über der von Rad-Transit, wobei der Unterschied mit steigender Entfernung wächst. Das Gleiche gilt auch für die Standardabweichung: diese ist ab Entfernungen von 5 km etwa 5 min größer als die Standardabweichung von Rad-Transit. Diese Unterschiede sind außerhalb der Stadt vermutlich so stark, weil hier die von Rad-Transit verwendeten Stationen mehr als 30 min entfernt sind, wodurch mit ÖPNV + Leihrad andere Verbindungen mit dem Bus genutzt werden müssen.

5 Experimente

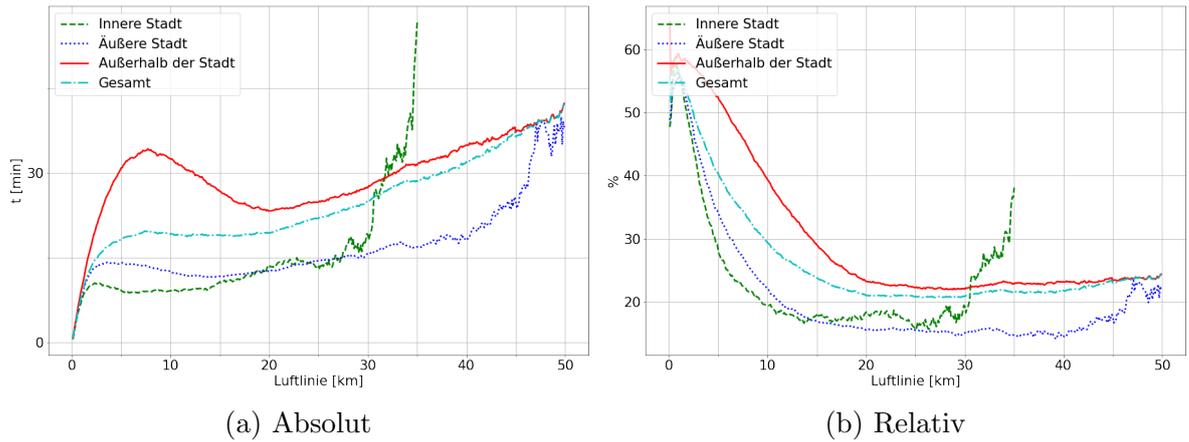


Abbildung 5.8: Differenz der durchschnittlichen Fahrzeit von ÖPNV (unimodal) und Rad-Transit für die verschiedenen Gebiete.

In Abbildung 5.8a ist die Differenz der durchschnittlichen Fahrzeiten von ÖPNV (unimodal) und Rad-Transit abgebildet. Die Differenz außerhalb der Stadt ist eindeutig am größten. Bei Strecken von über 3 km Entfernung liegt hier die durchschnittliche Fahrzeit von Rad-Transit 20 min - 35 min unter der durchschnittlichen Fahrzeit vom ÖPNV (unimodal). Innerhalb der Stadt fallen die Unterschiede sowohl in der inneren Stadt als auch in der äußeren Stadt recht ähnlich aus. Bei Fahrten über 2 km liegt die Differenz bei etwas über 10 min, wobei die Differenz mit steigender Entfernung wächst. Die Differenz für die innere Stadt wurde in Abbildung 5.8a nur für Fahrten von bis zu 30 km Entfernung abgebildet, da es zu wenig Fahrzeiten für Entfernungen über 30 km gibt und deshalb die Daten zu ungenau sind.

In Abbildung 5.8b ist die Differenz der durchschnittlichen Fahrzeit von ÖPNV (unimodal) und Rad-Transit relativ zur durchschnittlichen Fahrzeit von ÖPNV (unimodal) abgebildet. Für die äußere Stadt und außerhalb der Stadt scheint die Differenz ab 20 km proportional zur durchschnittlichen ÖPNV (unimodal) Fahrzeit zu wachsen.

5.4 Isochrone Karten für Hamburg

In diesem Abschnitt sind die Isochronen Karten für Hamburg abgebildet. Da wir für Hamburg die Fahrradmitnahme in Bussen generell erlaubt haben, und es bei Reisen von maximal 45 min keine sichtbaren Einschränkungen durch eine lokale Beschränkung von 30 min gibt, wurde das Profil ÖPNV + Leihrad hier nicht abgebildet. Allerdings unterscheiden sich doch einige Wege bezüglich ihrer Fahrzeit, so dass in Tabelle 5.3 auch bei Hamburg bei der durchschnittlichen Fahrzeit leichte Unterschiede zwischen den Profilen erkennbar sind. In Abbildung 5.9 ist erneut eine konzentrische Struktur der Erreichbarkeitsgebiete zu erkennen, jedoch wird dies im Süden durch die Elbe und deren Ausläufer unterbrochen. In Abbildung 5.10 ist ebenfalls wie in Abbildung 5.2 ein starker Zusammenhang zwischen der ÖPNV-Infrastruktur und den Erreichbarkeitsgebiet

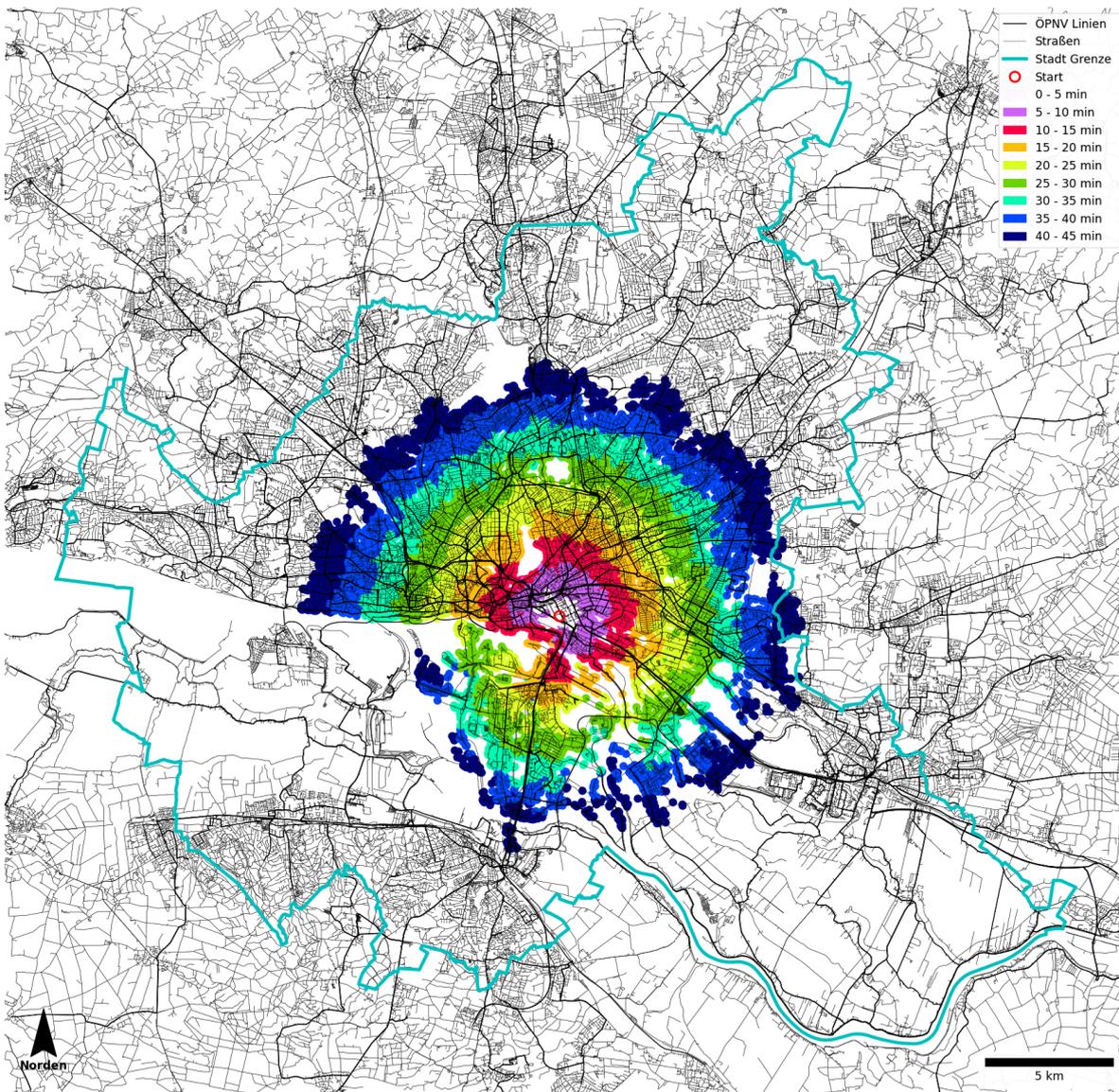


Abbildung 5.9: Erreichbarkeit mit dem Fahrrad (unimodal) für Hamburg um 12:00 Uhr.

zu erkennen. Abbildung 5.11 hat im inneren Bereich ebenfalls wie Abbildung 5.3 und Abbildung 5.4 eine kreisförmige Struktur, welche mit steigender Entfernung zum Startpunkt unschärfer wird. In Abbildung 5.11 sind wie in Abbildung 5.9 im Süden vom Stadtzentrum Verzerrungen durch die Elbe erkennbar. Diese werden jedoch zusätzlich durch eine ÖPNV-Verbindung beeinflusst, welche eine schnelle Anbindung der südlichen Elbseite ermöglicht.

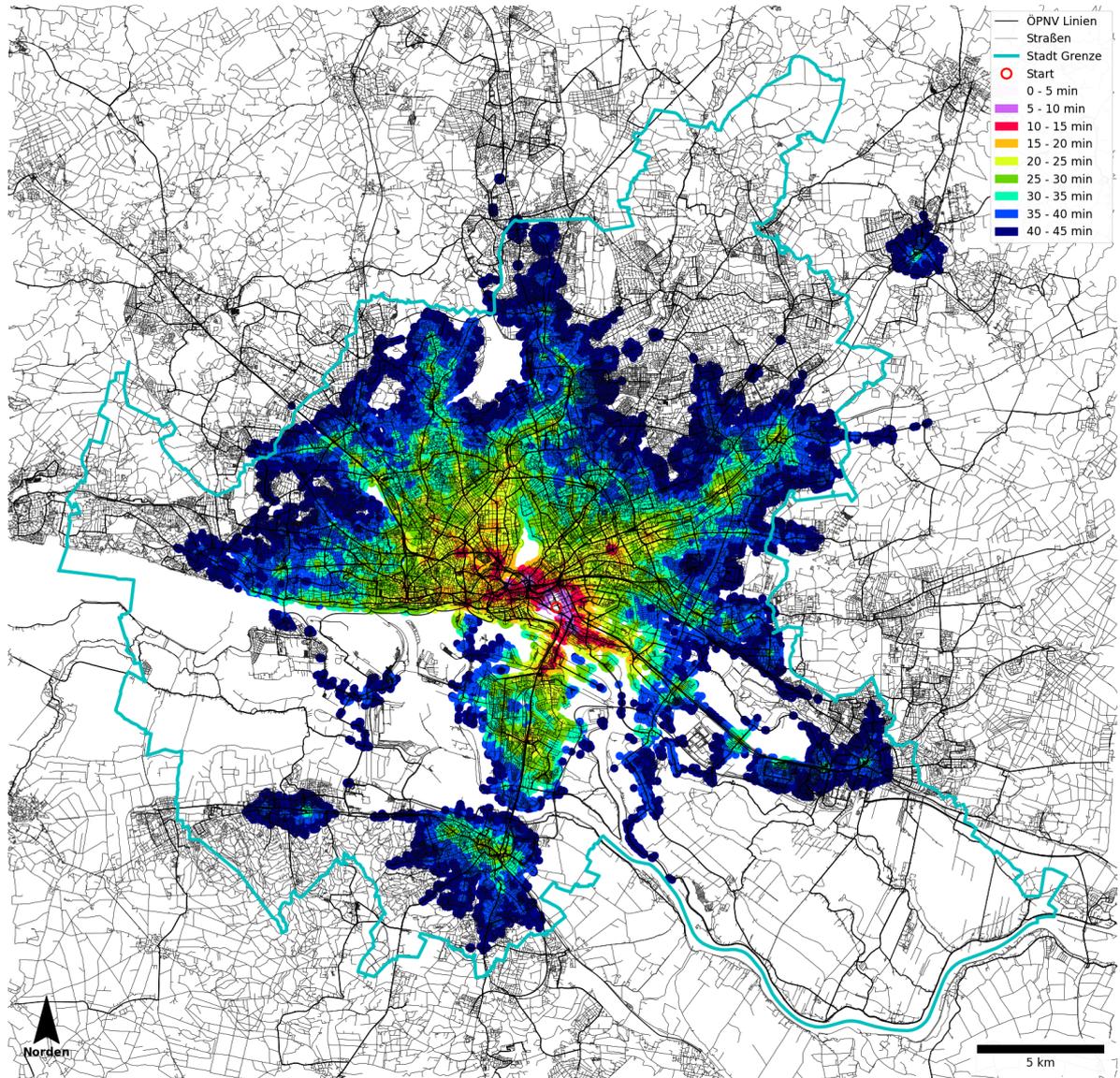


Abbildung 5.10: Erreichbarkeit mit ÖPNV (unimodal) für Hamburg um 12:00 Uhr.

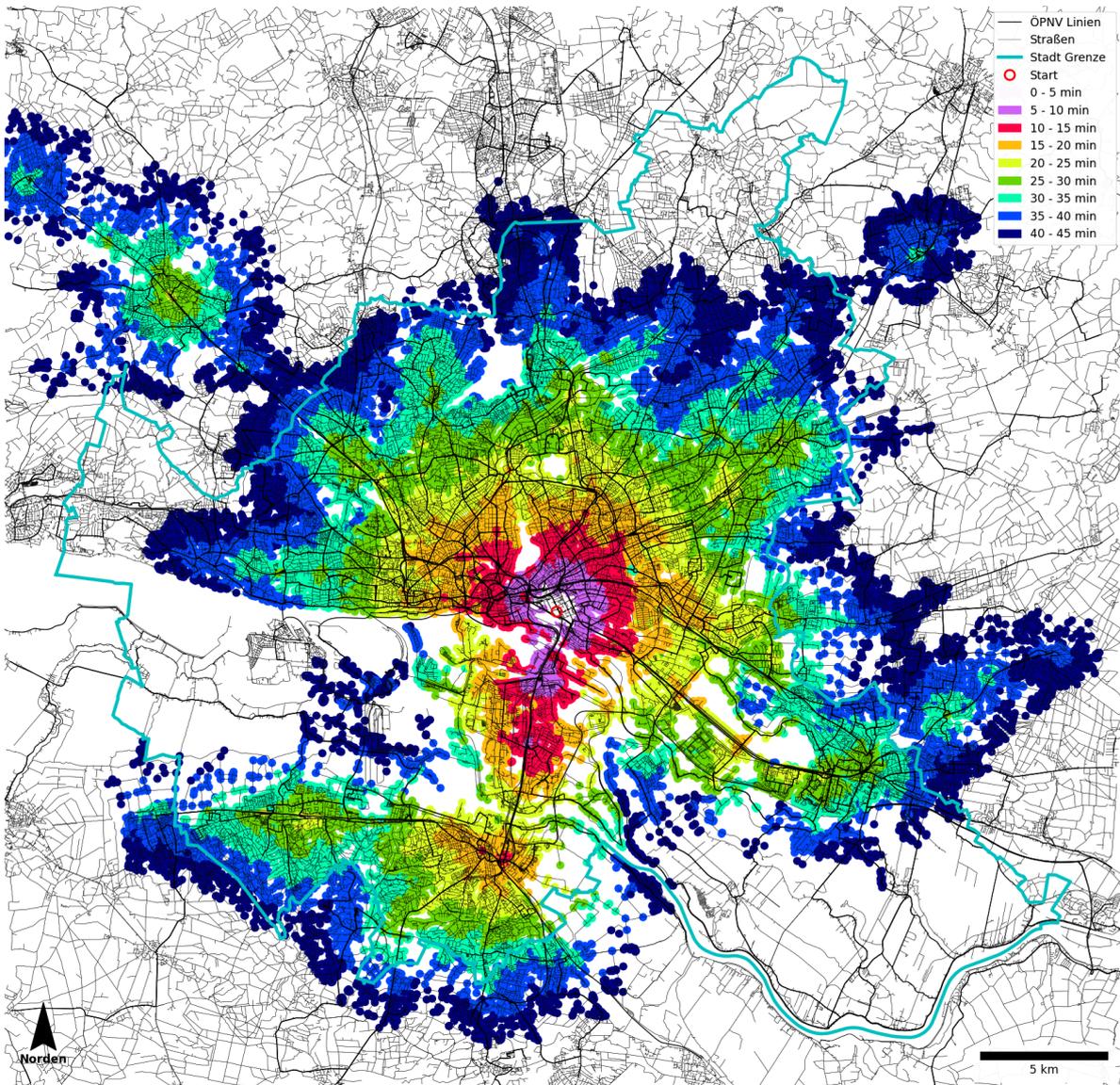


Abbildung 5.11: Erreichbarkeit mit Rad-Transit für Hamburg um 12:00 Uhr.

6 Fazit

Mit dem Ziel die intermodale ÖPNV-Nutzung zu analysieren, haben wir die Unterklasse der temporalen Graphen mit zeitlich invarianten Kanten untersucht. Dabei haben wir zwei Arten der spezifischen Beschränkung, die globale und die lokale Beschränkung, für temporale Pfade betrachtet.

Für die globale Beschränkung haben wir das Problem GLOBALE ERREICHBARKEIT eingeführt und untersucht, welches nach der Existenz eines temporalen s - z -Pfades unter globaler Beschränkung fragt. Wir haben gezeigt, dass GLOBALE ERREICHBARKEIT NP-vollständig ist. Zudem kann es als ein Spezialfall von *Multi-objective* Routing formuliert werden, so dass, wenn es einen temporalen Pfad unter lokaler Beschränkung gibt, ein entsprechender Pareto-optimaler temporaler Pfad existiert.

Im Kontext der lokalen Beschränkung haben wir frühestmögliche temporale Pfade studiert. Dazu haben wir einen Polynomialzeitalgorithmus entwickelt, welcher von einem gegebenem Startpunkt für jeden Knoten die Ankunftszeit der frühestmöglichen temporalen Pfade unter lokaler Beschränkung berechnet. Dazu suchen wir alle Pareto-optimalen temporalen Pfade unter lokaler Beschränkung und erweitern diese iterativ. Wir verwenden diesen Algorithmus um die intermodale ÖPNV-Nutzung in Berlin und Hamburg zu analysieren.

Die Ergebnisse unserer Analyse für Berlin zeigen, dass die intermodale Nutzung von Fahrrad und ÖPNV im Vergleich zur unimodalen Nutzung der beiden Verkehrsmittel zu einer wesentlichen Reduzierung der Fahrzeit führt. Zudem ist Zugänglichkeit bei Rad-Transit wesentlich gleichmäßiger im Vergleich zu der unimodalen ÖPNV-Nutzung, so dass Strecken mit gleicher Entfernung ähnlich viel Zeit beanspruchen. Diese Effekte sind jedoch, je nach Lage des Startpunkts und der gereisten Entfernung, unterschiedlich stark ausgeprägt. So kommt es, dass sich die durchschnittliche Fahrzeit und Standardabweichung außerhalb der Stadt durch Rad-Transit besonders deutlich verringern. Dort liegen die durchschnittlichen Fahrzeiten um 20 min bis 35 min auseinander, je nach gereister Entfernung. Die Standardabweichung unterscheidet sich in diesem Gebiet bei Fahrten ab etwa 7 km Entfernung um mindestens 10 min. Innerhalb der Stadt sind die durchschnittlichen Fahrzeiten wesentlich näher beieinander und unterscheiden sich um etwa 10 min bis 20 min, abhängig von Startpunkt und Entfernung der Strecke. Für die Standardabweichung gilt dasselbe, hier beträgt der Unterschied ab 5 km Entfernung etwa 5 min.

Bei der intermodalen Nutzung von ÖPNV und Leihrädern ist die durchschnittliche Fahrzeit innerhalb der Stadt noch etwas geringer als bei Rad-Transit, da hier die Fahrzeit einiger Strecken durch die zusätzliche Nutzung von Busverbindungen reduziert wird. Außerhalb der Stadt ist Rad-Transit durchschnittlich schneller, da für die frühest möglichen temporalen Pfade in diesem Gebiet öfter Radfahrten über 30 min notwendig sind. Dies

wirkt sich ebenfalls auf die Standardabweichung aus, welche hier für intermodale Nutzung von ÖPNV und Leihrad höher ist als für Rad-Transit.

Ausblick. Der von uns entwickelte Algorithmus ist schnell genug, um die ÖPNV-Infrastruktur von Städten zu analysieren. Für Echtzeitanfragen, wie sie zum Beispiel für ein Navigations-Service notwendig wären, ist die Laufzeit jedoch zu hoch. In solch diesem Fall könnten zum Beispiel Approximierungen genutzt werden, um die Ergebnisse abzuschätzen oder eine Heuristik eingeführt werden, um die Suche zielgerichtet auszuführen. Eine weitere Möglichkeit wäre, im vorhinein für jeden Ausstieg die kürzesten permanenten Pfade zu allen Knoten zu berechnen und bei der frühestmöglichen Ankunft an einer Station alle Knoten zu aktualisieren. Zudem könnte der Algorithmus für frühestmögliche temporale Pfade unter lokaler Beschränkung auf das analoge Problem der temporalen Pfade mit spätest möglicher Abfahrtszeit erweitert werden. Ebenfalls interessant wäre es, die lokale Beschränkung für kürzeste und schnellste temporale Pfade zu lösen.

Um das NP-vollständige Problem GLOBALE ERREICHBARKEIT weiter zu untersuchen, bieten sich Approximierungen, Heuristiken oder eine Parametrisierung an. Da das für Rad-Transit modellierte Netzwerk gewisse Strukturen aufweist, könnten Parameter wie der maximale Knotengrad oder die Reisezeit beschränkt werden. Die Reisezeit entspricht meist nur einem Bruchteil der Lebensdauer und der maximale Knotengrad ist durch die Anzahl der Straßen in der größten Kreuzung beschränkt.

Ein ausführlicher Vergleich zum Auto, welches weiterhin das meistgenutzte Verkehrsmittel ist [Inf19], wäre interessant in Hinsicht auf einen klimaneutralen Stadtverkehr. In diesem Zusammenhang wäre ebenfalls eine Analyse von ÖPNV in Kombination mit E-Bikes beziehungsweise S-Pedelecs interessant, da diese durch eine höhere Geschwindigkeit vermutlich noch geringere Fahrzeiten ergeben.

Zudem könnten die Fahrten ausführlicher kategorisiert werden. Eine Einteilung in die Bezirke wäre zum Beispiel möglich, um so eine noch differenziertere Analyse der verschiedenen Stadtgebiete durchzuführen. Zudem könnten die Fahrten zusätzlich nach ihren Endpunkten sortiert werden um die Einteilung weiter zu präzisieren.

Das Einbeziehen von Ampeln und Kreuzungen würde die Berechnung der Fahrzeiten weiter präzisieren, da diese maßgebliche Auswirkungen auf die Fahrzeiten innerhalb der Stadt haben. Für hügeligere Regionen wäre zudem das Einbeziehen von Höhendaten wichtig.

Anstatt die Fahrzeiten im Durchschnitt zu vergleichen, würde der direkte Vergleich von Routen neue Einsichten gewähren. So könnten zusätzlich Metriken, wie die Anzahl der Umstiege oder die Wartezeit, in Bezug auf die direkte Zeitersparnis untersucht werden.

Literatur

- [Ben+20] M. Bentert, A.-S. Himmel, A. Nichterlein und R. Niedermeier. „Efficient computation of optimal temporal walks under waiting-time constraints“. In: *Applied Network Science* 5.1 (Okt. 2020), S. 73. URL: <https://doi.org/10.1007/s41109-020-00311-0> (siehe S. 10, 22).
- [Boe17] G. Boeing. „OSMnx: New methods for acquiring, constructing, analyzing, and visualizing complex street networks“. In: *Computers, Environment and Urban Systems* 65 (Sep. 2017), S. 126–139. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compenvurbsys.2017.05.004> (siehe S. 39).
- [Bro+06] R. C. Browning, E. A. Baker, J. A. Herron und R. Kram. „Effects of obesity and sex on the energetic cost and preferred speed of walking“. In: *Journal of Applied Physiology* 100.2 (Feb. 2006), S. 390–398. URL: <https://doi.org/10.1152/jappphysiol.00767.2005> (siehe S. 40).
- [BUD13] A. Beckmann Klaus J.; Klein-Hitpaß und B. Deutsches Institut für Urbanistik Difu, Hrsg. *Nicht weniger unterwegs, sondern intelligenter? Neue Mobilitätskonzepte*. deutsch. Edition Difu - Stadt Forschung Praxis; 11. Deutschland, 2013, S. 271–293. URL: <https://repository.difu.de/jspui/handle/difu/211005> (siehe S. 7).
- [CLOPM16] F. Caicedo, H. Lopez-Ospina und R. Pablo-Malagrida. „Environmental repercussions of parking demand management strategies using a constrained logit model“. In: *Transportation Research Part D: Transport and Environment* 48 (Okt. 2016), S. 125–140. URL: <https://doi.org/10.1016/j.trd.2016.08.014> (siehe S. 7).
- [Cor+01] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest und C. Stein. *Introduction to Algorithms*. 2. Aufl. The MIT Press, 2001, S. 389 (siehe S. 35).
- [Deu] Deutsche Bahn Connect GmbH. *StadtRAD Hamburg — Preise*. URL: <https://stadtrad.hamburg.de/de/preise> (besucht am 12.12.2020) (siehe S. 23).
- [Dij59] E. W. Dijkstra. „A note on two problems in connexion with graphs“. In: *Numerische Mathematik* 1.1 (Dez. 1959), S. 269–271. URL: <https://doi.org/10.1007/bf01386390> (siehe S. 11).

- [Flu+20] T. Fluschnik, H. Molter, R. Niedermeier, M. Renken und P. Zschoche. „Temporal graph classes: A view through temporal separators“. In: *Theoretical Computer Science* 806 (2020), S. 197–218. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397519301975> (siehe S. 10).
- [GBD10] T. Gräbener, A. Berro und Y. Duthen. „Time dependent multiobjective best path for multimodal urban routing“. In: *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 36 (Aug. 2010), S. 487–494. URL: <https://doi.org/10.1016/j.endm.2010.05.062> (siehe S. 10, 11, 22).
- [GJ79] M. R. Garey und D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979, S. 61 (siehe S. 19).
- [Hol15] P. Holme. „Modern temporal network theory: a colloquium“. In: *The European Physical Journal B* 88.9 (Sep. 2015). URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2015-60657-4> (siehe S. 10).
- [HS19] P. Holme und J. Saramäki. *Temporal Network Theory*. Springer, 2019 (siehe S. 10).
- [Inf19] B. für Verkehr und digitale Infrastruktur. „Zeitreihenbericht 2002 - 2007 - 2017“. In: (2019), S. 28,50. URL: <https://www.bmvi.de/SharedDocs/DE/Artikel/G/mobilitaet-in-deutschland.html> (siehe S. 7, 58).
- [JCB00] W. Jones, R. Cassady und R. Bowden. „Developing a Standard Definition of Intermodal Transportation“. In: *Transportation Law Journal* 27 (Jan. 2000), S. 345–352 (siehe S. 7).
- [JO17] J. Jarass und R. Oostendorp. „Intermodal, urban, mobil – Charakterisierung intermodaler Wege und Nutzer am Beispiel Berlin“. In: *Raumforschung und Raumordnung* 75.4 (Aug. 2017), S. 355–369. URL: <https://doi.org/10.1007/s13147-017-0478-z> (siehe S. 7, 10, 11).
- [JTS13] S. Jäppinen, T. Toivonen und M. Salonen. „Modelling the potential effect of shared bicycles on public transport travel times in Greater Helsinki: An open data approach“. In: *Applied Geography* 43 (2013), S. 13–24. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014362281300132X> (siehe S. 11).
- [KBB16] R. Kager, L. Bertolini und M. T. Brömmelstroet. „Characterisation of and reflections on the synergy of bicycles and public transport“. In: *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 85 (März 2016), S. 208–219. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tra.2016.01.015> (siehe S. 7, 10).
- [KKK02] D. Kempe, J. Kleinberg und A. Kumar. „Connectivity and Inference Problems for Temporal Networks“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 64.4 (2002), S. 820–842. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000002918295> (siehe S. 10).

- [Mil+20] J. F. P. van Mil, T. S. Leferink, J. A. Annema und N. van Oort. „Insights into factors affecting the combined bicycle-transit mode“. In: *Public Transport* (Juli 2020). URL: <https://doi.org/10.1007/s12469-020-00240-2> (siehe S. 10).
- [Net14] NetworkX developer team. *NetworkX*. 2014. URL: <https://networkx.github.io/> (siehe S. 39).
- [nex] nextbike GmbH. *Fahrradverleih in Berlin — Preise*. URL: <https://www.nextbike.de/de/berlin/preise/> (besucht am 12.12.2020) (siehe S. 23).
- [Nic+12] V. Nicosia, J. Tang, M. Musolesi, G. Russo, C. Mascolo und V. Latora. „Components in time-varying graphs“. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22.2 (Juni 2012), S. 023101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3697996> (siehe S. 10).
- [OG18] R. Oostendorp und L. Gebhardt. „Combining means of transport as a users’ strategy to optimize traveling in an urban context: empirical results on intermodal travel behavior from a survey in Berlin“. In: *Journal of Transport Geography* 71 (2018), S. 72–83. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0966692317306130> (siehe S. 11).
- [Ope17] OpenStreetMap contributors. *Planet dump retrieved from planet.osm.org*. <https://www.openstreetmap.org>. 2017 (siehe S. 8).
- [Rai] A. Raichev. *GTFS Kit*. Version 5.0.2. URL: <https://pypi.org/project/gtfs-kit/> (siehe S. 39).
- [Sch+17] K. Schleinitz, T. Petzoldt, L. Franke-Bartholdt, J. Krems und T. Gehlert. „The German Naturalistic Cycling Study – Comparing cycling speed of riders of different e-bikes and conventional bicycles“. In: *Safety Science* 92 (Feb. 2017), S. 290–297. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2015.07.027> (siehe S. 40).
- [Sen] Senatsverwaltung für Stadtentwicklung und Wohnen. *Planwerk Innere Stadt - Räumliche Erweiterung*. URL: https://www.stadtentwicklung.berlin.de/planen/planwerke/de/planwerk_innere_stadt/herangehensweise/raeumliche_erweiterung/index.shtml (besucht am 13.11.2020) (siehe S. 49).
- [The20] The pandas development team. *pandas-dev/pandas: Pandas*. Version 1.1.4. Feb. 2020. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3509134> (siehe S. 39).
- [Umw19] N. u. n. S. B. Bundesministerium für Umwelt. „Klimaschutz in Zahlen“. In: (2019), S. 37–39. URL: <https://www.bmu.de/publikation/klimaschutz-in-zahlen-2019/> (siehe S. 7).

Literatur

- [Wu+14] H. Wu, J. Cheng, S. Huang, Y. Ke, Y. Lu und Y. Xu. „Path problems in temporal graphs“. In: *Proceedings of the VLDB Endowment* 7.9 (Mai 2014), S. 721–732. URL: <https://doi.org/10.14778/2732939.2732945> (siehe S. 10).
- [Zsc+20] P. Zschoche, T. Fluschnik, H. Molter und R. Niedermeier. „The complexity of finding small separators in temporal graphs“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 107 (2020), S. 72–92. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000019300546> (siehe S. 10).